EKSISTENSI TITIK TETAP PEMETAAN C-KONTRAKTIF DIPERUMUM PADA RUANG METRIK PARSIAL KOMPLEKS

(*EXISTENCE OF FIXED POINT OF GENERALIZED C-CONTRACTIVE MAPPING ON COMPLEX PARTIAL METRIC SPACE*)

Ahmad Ansar[1], Hikmah[2]
[1]Prodi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, ahmad.ansar@unsulbar.ac.id
[2] Prodi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, hikmah@unsulbar.ac.id

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan dan membuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap persekutuan dari pemetaan C-kontraktif lemah yang diperumum pada ruang metrik parsial kompleks. Dalam artikel ini dipaparkan beberapa teorema terkait ruang metrik kompleks dan ruang metrik parsial kompleks sebagai dasar dalam membuktikan teorema teorema titik tetap. Teorema utama yang diperoleh memperumum beberapa teorema-teorema terdahulu di ruang metrik kompleks yang telah dibuktikan.

Kata kunci: *C-kontraktif, metrik parsial kompleks*.

Abstract

The aims of this research are to explain and prove the existence and uniqueness of common fixed point of the generalized weak C-contractive mapping in the complex partial metric space. This article describes several theorems related to complex metric space and complex partial metric space as a base in proving the fixed point theorem. The main theorem is generalized some of the preceding theorems in complex metric space which have been proven.

Keywords: *C-contractive, complex partial metric*.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Teori titik tetap merupakan suatu cabang ilmu matematika analisis yang membahas eksistensi titik tetap dari suatu fungsi atau pemetaan di ruang metrik tertentu. Pada tahun 1972, Chatterjea memperkenalkan konsep pemetaan C-kontraktif dan membuktikan eksistensi titik tetapnya di ruang metrik.

Definisi 1 (Chatterjea, 2010) Diketahui (X,d) merupakan suatu ruang metrik. Pemetaan $T:X\to X$ disebut pemetaan C-kontraktif apabila terdapat $\alpha\in\left(0,\tfrac{1}{2}\right)$ sehingga berlaku

$$d\big(T(x),T(y)\big)\le\alpha\Big(d\big(x,T(y)\big)+d\big(y,T(x)\big)\Big) \tag{1}$$

untuk setiap $x,y\in X$.

Selanjutnya, Choudhury juga merumuskan konsep pemetaan C-kontraktif lemah yang merupakan perumuman dari pemetaan C-kontraktif.

Definisi 2 (Choudhury, 2009) Diketahui (X,d) merupakan suatu ruang metrik. Pemetaan $T:X\to X$ disebut pemetaan C-kontraktif lemah untuk setiap $x,y\in X$ berlaku

$$d\left(T(x),T(y)\right)\le\frac{1}{2}\left(d\left(x,T(y)\right)+d\left(y,T(x)\right)\right)-\phi\left(d\left(x,T(y)\right),d\left(y,T(x)\right)\right)\quad(2)$$

dengan $\phi:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ merupakan fungsi kontinu dan memenuhi $x=0=y$ jika dan hanya jika. $\phi(x,y)=0$

Beberapa penelitian terkait titik tetap pemetaan C-kontraktif antara lain: eksistensi titik tetap pemataan C-kontraktif di ruang metrik terurut (Harjani et al., 2011) serta eksistensi titik tetap pemetaan tipe C-kontraktif di ruang metrik parsial (Chen & Zhu, 2013). Penelitian yang membahas teorema titik tetap pemataan C-kontraktif di ruang metrik parsial kompleks masih sangat terbatas sehingga dalam artikel ini diuraikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap perumuman pemetaan C-kontraktif lemah di ruang metrik parsial kompleks.

Ruang Metrik Parsial

Konsep ruang metrik parsial pertama kali diperkenalkan oleh Matthews dimana jarak antara dua titik yang sama tidak selalu bernilai nol. Konsep ruang metrik parsial merupakan permuman dari ruang metrik. Berikut dijelaskan terkait definisi ruang metrik parsial.

Definisi 3 (Matthews, 1994) Diketahui X merupakan suatu himpunan yang tidak kosong. Pemetaan $p:X\times X\to\mathbb{R}$ disebut metrik parsial pada X apabila untuk setiap $x,y,z\in X$ berlaku

i. $x=y$ jika dan hanya jika $p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$
ii. $0\le p(x,x)\le p(x,y)$
iii. $p(x,y)=p(y,x)$
iv. $p(x,y)\le p(x,z)+p(z,y)-p(y,y)$

Pasangan (X,p) disebut ruang metrik parsial.

Ruang Metrik Parsial Kompleks

Azam et al (2011) merumuskan ruang metrik kompleks dengan terlebih dahulu mendefinisikan suatu relasi urutan parsial $\precsim$ pada $\mathbb{C}$ yaitu

$$z_1\precsim z_2 \text{ jika dan hanya jika } \operatorname{Re}(z_1)\le\operatorname{Re}(z_2) \text{ dan } \operatorname{Im}(z_1)\le\operatorname{Im}(z_2)$$

Definisi 4 (Azam et al., 2011) Diketahui X merupakan suatu himpunan yang tidak kosong. Pemetaan $d_{\mathbb{C}}:X\times X\to\mathbb{R}$ disebut metrik parsial kompleks pada X apabila untuk setiap $x,y,z\in X$ berlaku

i. $0 \precsim d_{\mathbb{C}}(x,y)$

ii. $d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d_{\mathbb{C}}(x,y) = d_{\mathbb{C}}(y,x)$

iv. $d_{\mathbb{C}}(x,y) \precsim d_{\mathbb{C}}(x,z) + d_{\mathbb{C}}(z,y)$

Berikut dijelaskan terkait konsep barisan di ruang metrik kompleks $(X, d_{\mathbb{C}})$ yaitu barisan konvergen dan Cauchy.

Definisi 5 (Azam et al., 2011) Diketahui $(X, d_{\mathbb{C}})$ merupakan suatu ruang metrik kompleks. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ apabila untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{C}$ dengan $\varepsilon \succ 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > N$ berakibat $d_{\mathbb{C}}(x_n, x) \prec \varepsilon$

Selanjutnya, $x \in X$ disebut titik limit dari barisan $\{x_n\} \subseteq X$ dan ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } \lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{C}}(x_n, x) = 0$$

Definisi 6 (Klin-Eam & Suanoom, 2013) Diketahui $(X, d_{\mathbb{C}})$ merupakan suatu ruang metrik kompleks. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{C}$ dengan $\varepsilon \succ 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m > N$ berakibat $d_{\mathbb{C}}(x_n, x_m) \prec \varepsilon$.

Berdasarkan Definisi 5 , maka $\{x_n\} \subseteq X$ adalah barisan Cauchy dapat di tulis

$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{C}}(x_n, x_m) = 0$

Teorema 1 (Azam et al., 2011) Diketahui $(X, d_{\mathbb{C}})$ merupakan suatu ruang metrik kompleks. Barisan $\{x_n\} \subseteq X$ merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $|d_{\mathbb{C}}(x_n, x_m)| \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Analogi dengan ruang metrik parsial, maka konsep ruang metrik kompleks diperumum menjadi ruang metrik parsial kompleks. Notasi $\mathbb{C}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan kompleks z dengan $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ dan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

Definisi 7 (Dhivya & Marudai, 2017) Diberikan X merupakan suatu himpunan yang tidak kosong. Pemetaan $p_{\mathbb{C}} : X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik parsial kompleks apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku

i. $0 \precsim p_c(x,x) \leq p_c(x,y)$

ii. $p_c(x,y) = p_c(y,x)$

iii. $x = y$ jika dan hanya jika $p_c(x,x) = p_c(x,y) = p_c(y,y)$

iv. $p_c(x,y) \precsim p_c(x,z) + p_c(z,y) - p_c(z,z)$

Pasangan $\left(X, p_{\mathbb{C}}\right)$ disebut ruang metrik parsial kompleks. Setiap ruang metrik parsial kompleks memiliki bola terbuka

$$B_{p_c}\left(x,\varepsilon\right)=\left\{y\in X : p_c\left(x,y\right)< p_c\left(x,x\right)+\varepsilon\right\}$$

untuk setiap $x\in X$ dan $0\prec\varepsilon\in\mathbb{C}$. Jika p_c metrik parsial kompleks pada X , maka $d_{p_c}: X\times X\to\mathbb{C}$ dengan $d_{p_c}\left(x,y\right)=2p_c\left(x,y\right)-p\left(x,x\right)-p_c\left(y,y\right)$ merupakan metrik kompleks (yang biasa) pada X (Dhivya & Marudai, 2017).

Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema-teorema terkait ruang metrik parsial kompleks.

Definisi 8 (Dhivya & Marudai, 2017) Diketahui $\left(X, p_{\mathbb{C}}\right)$ merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks. Barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ dikatakan konvergen ke $x\in X$ apabila untuk setiap $0\prec\varepsilon\in\mathbb{C}$ terdapat $N\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n\geq N$ berakibat $x_n\in B_{p_c}\left(x,\varepsilon\right)$.

Selanjutnya, x disebut titik limit barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ dan ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Teorema 2 (Dhivya & Marudai, 2017) Diketahui $\left(X, p_{\mathbb{C}}\right)$ merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks. Barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ konvergen ke $x\in X$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} p_c\left(x_n,x\right)=p_c\left(x,x\right)$.

Definisi 9 (Dhivya & Marudai, 2017) Diketahui $\left(X, p_{\mathbb{C}}\right)$ merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks. Barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ disebut barisan Cauchy apabila terdapat $a\in\mathbb{C}^+$ sehingga untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $N\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n,m\geq N$ berakibat $\left|p_c\left(x_n,x_m\right)-a\right|<\varepsilon$

Definisi 10 (Dhivya & Marudai, 2017) Suatu ruang metrik parsial kompleks $\left(X, p_{\mathbb{C}}\right)$ dikatakan lengkap jika dan hanya jika untuk setiap barisan Cauchy $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ konvergen ke $x\in X$ yaitu $\lim\limits_{n,m\to\infty} p_c\left(x_n,x_m\right)=p_c\left(x,x\right)$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil utama dalam artikel ini merujuk pada hasil yang didapatkan oleh Shatanawi. Dalam papernya, Shatanawi menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap persekutuan dari dua buah pemetaan yang merupakan perluasan dari pemetaan C-kontraktif. (Shatanawi, 2011). Berikut dijelaskan terkait hubungan antara barisan Cauchy di $\left(X, p_c\right)$ dengan barisan Cauchy di $\left(X, d_{p_c}\right)$.

Teorema 3 Diketahui $\left(X, p_c\right)$ merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks. Barisan $\left\{x_n\right\}\subseteq X$ merupakan barisan Cauchy di $\left(X, p_c\right)$ jika dan hanya jika

$\{x_n\} \subseteq X$ barisan Cauchy di $\left(X, d_{p_c}\right)$.

Bukti: $\Rightarrow$) Misalkan $\{x_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy (X, p_c). Berarti terdapat $a \in \mathbb{C}^+$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n, m \geq N$ berlaku $\left|p_c(x_n, x_m) - a\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Akibatnya, untuk setiap $m, n > N$ berakibat

$$\begin{aligned} d_{p_c}(x_n, x_m) &= 2p_c(x_n, x_m) - p_c(x_n, x_n) - p_c(x_m, x_m) \\ &\precsim 2\left|p_c(x_n, x_m) - a\right| + \left|p_c(x_n, x_n) - a\right| + \left|p_c(x_m, x_m) - a\right| \\ &\prec 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\left(X, d_{p_c}\right)$.

$\Leftarrow$) Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di $\left(X, d_{p_c}\right)$. Berdasarkan Teorema 1, maka $\left|d_{p_c}(x_n, x_m)\right| \to 0$ untuk $n \to \infty$.

Diperoleh untuk $n \to \infty$

$$\left|2p_c(x_n, x_m) - p_c(x_n, x_m) - p_c(x_m, x_m)\right| \to 0$$

Karena $p_c(x_n, x_n), p_c(x_m, x_m) \in \mathbb{C}^+$, maka

$$\left|2p_c(x_n, x_m) - \left(p_c(x_n, x_m) + p_c(x_m, x_m)\right)\right| \to 0$$

Hal ini menunjukkan barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, p_c). ■

Akibat 4 Ruang metrik parsial kompleks (X, p_c) bersifat lengkap jika dan hanya jika ruang metrik kompleks $\left(X, d_{p_c}\right)$ lengkap. Selanjutnya berlaku,

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{C}}(x_n, x) = 0 \text{ jika dan hanya jika } p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p_c(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p_c(x_n, x_m)$$

Definisi 11 (Abbas et al., 2015) Fungsi kontrol $\psi : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ didefinisikan sebagai fungsi tidak turun (*nondecreasing*) yang memenuhi $\psi(w) = 0$ jika dan hanya jika $w = 0$.

Definisi 12 Titik $a \in X$ disebut titik tetap persekutuan dari pemetaan $f, g : X \to X$ apabila berlaku $f(a) = a = g(a)$ untuk suatu $a \in X$.

Teorema berikut menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap persekutuan dari dua buah fungsi yang memenuhi kondisi perluasan pemetaan C-kontraktif.

Teorema 5 Misalkan (X, p_c) merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks lengkap, pemetaan $f, g : X \to X$ dan fungsi $\phi : \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ kontinu yang memenuhi $\phi(z,w)=0$ jika dan hanya $z=0=w$. Jika untuk setiap $x,y\in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c\left(f(x),g(y)\right)\right)\precsim{}&\psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x,g(y)\right)+p_c\left(y,f(x)\right)\right)\right)-\\&\phi\left(p_c\left(x,g(y)\right),d\left(y,f(x)\right)\right)\end{aligned}\tag{3}$$

dengan $\psi:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ adalah fungsi kontrol, maka f,g mempunyai titik tetap persekutuan yang tunggal, yaitu terdapat $u\in X$ sehingga $f(u)=u=g(u)$.

Bukti:

Ambil sebarang $x_0\in X$ dan didefinisikan barisan $\{x_n\}\subseteq X$ dengan

$$\begin{aligned}&f(x_0)=x_1 \quad \text{dan} \quad g(x_1)=x_2\\&f(x_2)=x_3 \quad \text{dan} \quad g(x_3)=x_4\\&\qquad\qquad\vdots\end{aligned}$$

sehingga diperoleh barisan $x_{2n+1}=f(x_{2n})$ dan $x_{2n+2}=g(x_{2n+1})$. Ditunjukkan bahwa $p_c(x_n,x_{n+1})\precsim p_c(x_n,x_{n-1})$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)\right)&=\psi\left(p_c\left(f(x_{2n}),g(x_{2n+1})\right)\right)\\&\precsim\psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n},g(x_{2n+1})\right)+p_c\left(x_{2n+1},f(x_{2n})\right)\right)\right)-\\&\quad\phi\left(p_c\left(x_{2n},g(x_{2n+1})\right),p_c\left(x_{2n+1},f(x_{2n})\right)\right)\\&=\psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n},x_{2n+2}\right)+p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\right)-\\&\quad\phi\left(p_c\left(x_{2n},x_{2n+2}\right),p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\\&\precsim\psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n},x_{2n+2}\right)+p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Kerana ψ adalah fungsi *nondecreasing*, maka

$$\begin{aligned}p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)&\precsim\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n},x_{2n+2}\right)+p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\\&\precsim\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)+p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)-p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)+p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

Diperoleh

$$p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)\precsim p_c\left(x_{2n},x_{2n+1}\right)\tag{4}$$

Menggunakan cara yang sama, maka

$$p_c\left(x_{2n+2},x_{2n+3}\right)\precsim p_c\left(x_{2n+1},x_{2n+2}\right)\tag{5}$$

Akibatnya, berdasarkan (4) dan (5), berlaku

$$p_c\left(x_n,x_{n+1}\right)\precsim p_c\left(x_{n-1},x_n\right)\tag{6}$$

untuk setiap $n\in\mathbb{N}$

Jadi barisan $\{p_c(x_n,x_{n+1})\}$ adalah barisan bilangan kompleks dengan $\mathrm{Re}\left(p_c(x_n,x_{n+1})\right)$ membentuk suatu barisan yang tidak naik dan $\mathrm{Im}\left(p_c(x_n,x_{n+1})\right)$ juga membentuk barisan yang tidak naik. Oleh karena itu, terdapat $z=x+iy\in\mathbb{C}$ dengan barisan $\{\mathrm{Re}\left(p_c(x_n,x_{n+1})\right)\}$ konvergen ke x dan barisan $\mathrm{Im}\left(p_c(x_n,x_{n+1})\right)$

konvergen ke y . Jadi $\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_n, x_{n+1}\right) = z$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) &\precsim \tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right) \\ &\precsim \tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right) - p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right) \\ &\precsim \tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \end{aligned}$$

Untuk $n \to \infty$, diperoleh

$$z \precsim \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right) \precsim \tfrac{1}{2}\left(z+z\right) \tag{7}$$

Akibatnya,

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right) = 2z \tag{8}$$

Selanjtunya, berdasarkan persamaan (8) dan kekontinuan ψ dan ϕ, maka

$$\psi\left(\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) + p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right)\right) - \phi\left(\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right), \lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right)$$

atau

$$\psi(z) \precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}2z\right) - \phi\left(\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right), \lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right)$$

Akibatnya, $\phi\left(\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right), \lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right) = 0$. Berarti

$$\lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right) = z \text{ dan } \lim_{n\to\infty} p_c\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) = z \tag{9}$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\} \subseteq X$ adalah barisan Cauchy. Cukup ditunjukkan bahwa $\{x_{2n}\} \subseteq X$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik kompleks $\left(X, d_{p_c}\right)$. Diandaikan $\{x_{2n}\} \subseteq X$ bukan meruapakn suatu barisan Cauchy, berarti terdapat $\varepsilon \in \mathbb{C}^+$ dengan $\varepsilon \succ 0$ sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat $m, n \geq k$ sehingga berlaku

$$d_{p_c}\left(x_{2n}, x_{2m}\right) \succeq \varepsilon \tag{10}$$

Berarti terdapat subbarisan $\left\{x_{2n_k}\right\}, \left\{x_{2m_k}\right\} \subseteq \{x_{2n}\}$ dengan $n_k > m_k > k$ sehingga

$$d_{p_c}\left(x_{2n_k}, x_{2m_k}\right) \succeq \varepsilon \tag{11}$$

Selnjutnya, dipilih bilangan asli terkecil n_k dengan $n_k > m_k$ dan memenuhi (11) sehingga diperoleh

$$d_{p_c}\left(x_{2n_k-2}, x_{2m_k}\right) \prec \varepsilon \tag{12}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varepsilon &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right) \\ &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k-2}\right) + d_{p_c}\left(x_{2n_k-2}, x_{2n_k-1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}\right) \\ &\prec \varepsilon + d_{p_c}\left(x_{2n_k-2}, x_{2n_k-1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}\right) \end{aligned}$$

Karena $d_{p_c}\left(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}\right) = 2p_c\left(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}\right) - p_c\left(x_{2n_k-1}, x_{2n_k-1}\right) - p_c\left(x_{2n_k}, x_{2n_k}\right)$, maka untuk $k \to \infty$, maka diperoleh

$$2\lim_{k\to\infty} p_c\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right) = \varepsilon \tag{13}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\varepsilon &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right)\\ &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right)\\ &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2m_k}\right) + d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right)\\ &\precsim 2d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right)\end{aligned}$$

Karena $d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2m_k}\right) = 2p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2m_k}\right) - p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2m_k-1}\right) - p_c\left(x_{2m_k}, x_{2m_k}\right)$, maka untuk $k \to \infty$ diperoleh $\varepsilon \precsim \lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right)$. Di lain pihak $d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) \precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right)$ sehingga untuk $k \to \infty$ diperoleh $\lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) \precsim \varepsilon$

Jadi

$$2\lim_{k\to\infty} p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) = \varepsilon \tag{14}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right) &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2n_k+1}, x_{2n_k}\right)\\ &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k}\right) + 2d_{p_c}\left(x_{2n_k+1}, x_{2n_k}\right)\end{aligned}$$

Untuk $k \to \infty$, maka

$$2\lim_{k\to\infty} p_c\left(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k}, x_{2n_k+1}\right) = \varepsilon \tag{15}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}\right) + d_{p_c}\left(x_{2n_k+1}, x_{2n_k}\right)\\ &\precsim d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k}\right) + 2d_{p_c}\left(x_{2n_k+1}, x_{2n_k}\right)\end{aligned}$$

Untuk $k \to \infty$, maka

$$2\lim_{k\to\infty} p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} d_{p_c}\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}\right) = \varepsilon \tag{16}$$

Oleh karena itu, berdasarkan (3), maka

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c\left(x_{2n_k+1}, x_{2m_k}\right)\right) &= \psi\left(d_{p_c}\left(f\left(x_{2n_k}\right), g\left(x_{2m_k-1}\right)\right)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(d_{p_c}\left(x_{2n_k}, g\left(x_{2m_k-1}\right)\right) + p_c\left(x_{2m_k-1}, f\left(x_{2n_k}\right)\right)\right)\right) -\\ &\qquad \phi\left(p_c\left(x_{2n_k}, g\left(x_{2m_k-1}\right)\right), p_c\left(x_{2m_k-1}, f\left(x_{2n_k}\right)\right)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n_k}, x_{2m_k}\right) + p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}\right)\right)\right) -\\ &\qquad \phi\left(p_c\left(x_{2n_k}, x_{2m_k}\right), p_c\left(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}\right)\right)\end{aligned}$$

Untuk $k \to \infty$, menggunakan (13) – (16) dan kekontinuan fungsi ψ dan ϕ, maka

$$\psi\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \precsim \psi\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) - \phi\left(\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \tag{17}$$

Oleh karena itu, $\phi\left(\tfrac{\varepsilon}{2}, \tfrac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Akibatnya, $\varepsilon = 0$. Kontradiksi dengan $\varepsilon > 0$. Berarti barisan $\{x_{2n}\}$ merupakan barisan Cauchy di $\left(X, d_{p_c}\right)$. Jadi barisan $\{x_n\} \subseteq X$ juga merupakan barisan Cauchy di (X, p_c). Karena X lengkap, maka terdapat $x \in X$ sehingga

$\lim_{n\to\infty} d_{p_c}(x_n, x) = 0$ jika dan hanya jika

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p_c(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p_c(x_n, x_m) = \frac{1}{2} \lim_{n,m\to\infty} d_{p_c}(x_n, x_m) = 0$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c\left(x_{2n+1}, g(x)\right)\right) &= \psi\left(p_c\left(f(x_{2n}), g(x)\right)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x_{2n}, g(x)\right) + p_c\left(x, x_{2n+1}\right)\right)\right) - \phi\left(p_c\left(x_{2n}, g(x)\right), p_c\left(x, x_{2n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

Untuk $n \to \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c\left(x, g(x)\right)\right) &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x, g(x)\right) + p_c(x,x)\right)\right) - \phi\left(p_c\left(x, g(x)\right), p_c(x,x)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x, g(x)\right) + p_c(x,x)\right)\right)\end{aligned}$$

Karena ψ fungsi tidak turun, maka $p_c\left(x, g(x)\right) \precsim p_c(x,x)$

Karena $p_c(x,x) \precsim p_c\left(x, g(x)\right)$, maka $p_c(x,x) = p_c\left(x, g(x)\right)$

Dilain pihak, $p_c\left(g(x), g(x)\right) \precsim p_c\left(x, g(x)\right)$. Karena $p_c(x,x) = 0$, maka $p_c\left(g(x), g(x)\right) = 0$. Akibatnya, $p_c\left(g(x), g(x)\right) = p_c(x,x) = p_c\left(x, g(x)\right)$. Jadi $g(x) = x$. Dengan cara yang sama, diperoleh $f(x) = x$. Jadi $f(x) = x = g(x)$, yaitu terdapat $x \in X$ yang merupakan titik tetap persekutuan dari f dan g.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa titik tetap persekutuan dari f dan g adalah tunggal. Andaikan $x, y \in X$ dengan $x \neq y$ adalah titik tetap peresekutuan dari f dan g. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\psi\left(p_c(x,y)\right) &= \psi\left(p_c\left(f(x), g(y)\right)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x, g(y)\right) + p_c\left(y, f(x)\right)\right)\right) - \phi\left(p_c\left(x, g(y)\right), p_c\left(y, f(x)\right)\right)\\ &\precsim \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c(x,y) + p_c(x,y)\right)\right) - \phi\left(p_c(x,y), p_c(x,y)\right)\end{aligned}$$

Diperoleh $\phi\left(p_c(x,y), p_c(x,y)\right) = 0$ atau $p_c(x,y) = 0$. Dengan cara yang sama, maka diperoleh $p_c(x,x) = 0$ dan $p_c(y,y) = 0$. Akibatnya, $x = y$, kontradiksi dengan $x \neq y$. Jadi titik tetap peresekutuan dari f dan g adalah tunggal. ■

Berdasarkan Teorema 5 diperoleh beberapa akibat yang merupakan teorema titik tetap pemetaan C-kontraktif di ruang metrik parsial kompleks.

Akibat 6 Diberikan (X, p_c) ruang metrik parsial kompleks lengkap, fungsi $f : X \to X$ dan fungsi $\phi : \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ kontinu yang memenuhi $\phi(z,w) = 0$ jika dan hanya jika $z=w=0$. Jika untuk setiap $x,y\in X$ berlaku

$$\psi\left(p_c\left(f(x),f(y)\right)\right)\precsim\psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c\left(x,f(y)\right)+p_c\left(y,f(x)\right)\right)\right)-\phi\left(p_c\left(x,f(y)\right),d\left(y,f(x)\right)\right) \tag{18}$$

dengan $\psi:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ adalah fungsi kontrol, terdapat $u\in X$ sehingga $f(u)=u$.

Bukti:

Menggunakan Teorema 5 dengan memilih fungsi $f=g$, maka f mempunyai titik tetap yang tunggal, yaitu terdapat $u\in X$ sehingga $f(u)=u$.

Akibat 7 Diketahui (X,p_c) merupakan suatu ruang metrik parsial kompleks lengkap, fungsi $f,g:X\to X$ dan fungsi $\phi:\mathbb{C}^+\times\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ kontinu yang memenuhi $\phi(z,w)=0$ jika dan hanya jika $z=w=0$. Jika untuk setiap $x,y\in X$ berlaku

$$p_c\left(f(x),g(y)\right)\precsim\frac{1}{2}\left(p_c\left(x,g(y)\right)+p_c\left(y,f(x)\right)\right)-\phi\left(p_c\left(x,g(y)\right),d\left(y,f(x)\right)\right) \tag{19}$$

maka f,g mempunyai titik tetap persekutuan yang tunggal, yaitu terdapat $u\in X$ sehingga $f(u)=u=g(u)$.

Bukti:

Menggunakan Teorema 5 dengan memilih fungsi identitas $\psi(z)=i(z)$, maka f dan g mempunyai titik tetap persekutuan yang tunggal, yaitu terdapat $u\in X$ sehingga $f(u)=u=g(u)$.

Berikut diberikan contoh untuk fungsi yang memenuhi kondisi (3).

Contoh 1 Misalakn $X=[0,1]$ serta metrik kompleks $p_c:X\times X\to\mathbb{C}$ dengan $p_c(x,y)=\max\{x,y\}(1+i)$. Pasangan (X,p_c) adalah ruang metrik parsial kompleks lengkap (Gunaseelan & Mishra, 2019). Misalkan untuk setiap $x\in X$, $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ dan $g(x)=0$. Didefinisikan fungsi $\psi:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ dengan $\psi(t)=t^2$ untuk setiap $t\in\mathbb{C}^+$ serta fungsi $\phi:\mathbb{C}^+\times\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ dengan $\phi(t,s)=\frac{1}{8}(t+s)^2$ untuk setiap $t,s\in\mathbb{C}^+$.

Ambil sebarang $x,y\in X$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x>y$. Perhatikan kasus berikut.

Kasus 1, untuk $\frac{1}{4}x^2>y$.

$$
\begin{aligned}
\psi\left(p_c\left(f(x),g(y)\right)\right) &= \psi\left(p_c\left(\tfrac{1}{4}x^2,0\right)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\\
&= \tfrac{1}{16}x^4(1+i)^2\\
&\precsim \tfrac{1}{8}x^2(1+i)^2\\
&\precsim \tfrac{1}{8}\left(x(1+i)+\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)^2\\
&= \tfrac{1}{4}\left(x(1+i)+\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)^2-\tfrac{1}{8}\left(x(1+i)+\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)^2\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(x(1+i)+\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\right)-\phi\left(x(1+i),\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c(x,0)+p_c\left(y,\tfrac{1}{4}x^2\right)\right)\right)-\phi\left(p_c(x,0),p_c\left(y,\tfrac{1}{4}x^2\right)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c(x,g(y))+p_c(y,f(x))\right)\right)-\phi\left(p_c(x,g(y)),p_c(y,f(x))\right)
\end{aligned}
$$

Kasus 2, untuk $\tfrac{1}{4}x^2 < y$.

$$
\begin{aligned}
\psi\left(p_c\left(f(x),g(y)\right)\right) &= \psi\left(p_c\left(\tfrac{1}{4}x^2,0\right)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\\
&= \tfrac{1}{16}x^4(1+i)^2\\
&\precsim \tfrac{1}{8}x^2(1+i)^2\\
&\precsim \tfrac{1}{8}\left(x(1+i)+y^2(1+i)\right)^2\\
&= \tfrac{1}{4}\left(x(1+i)+y^2(1+i)\right)^2-\tfrac{1}{8}\left(x(1+i)+y^2(1+i)\right)^2\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(x(1+i)+\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\right)-\phi\left(x(1+i),\tfrac{1}{4}x^2(1+i)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c(x,0)+p_c\left(y,\tfrac{1}{4}x^2\right)\right)\right)-\phi\left(p_c(x,0),p_c\left(y,\tfrac{1}{4}x^2\right)\right)\\
&= \psi\left(\tfrac{1}{2}\left(p_c(x,g(y))+p_c(y,f(x))\right)\right)-\phi\left(p_c(x,g(y)),p_c(y,f(x))\right)
\end{aligned}
$$

Karena f,g memenuhi kondisi pada Teorema 5, maka f dan g mempunyai titik tetap persekutuan yang tunggal yaitu $x=0$

KESIMPULAN

Ruang metrik kompleks diperumum menjadi ruang metrik parsial kompleks. Menggunakan sifat kekonvergenan barisan dan sifat lengkap di ruang metrik parsial kompleks dapat ditunjukkan bahwa fungsi-fungsi yang memenuhi permuman pemetaan C-kontraktif memiliki titik tetap persekutuan yang tunggal. Hasil utama yang diperoleh menghasilkan beberapa akibat yang menunjukkan eksistensi titik tetap pemetaan tipe C-kontraktif di ruang metric parsial komplkes.

DAFTAR RUJUKAN

Abbas, M., De La Sen, M., & Nazir, T. (2015). Common Fixed Points of Generalized Cocyclic Mappings in Complex Valued Metric Spaces. *Discrete*

Dynamics in Nature and Society, 1–11. https://doi.org/10.1155/2015/147303

Azam, A., Fisher, B., & Khan, M. (2011). Common fixed point theorems in complex valued metric spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *32*(3), 243–253. https://doi.org/10.1080/01630563.2011.533046

Chatterjea, S. K. (2010). Fixed point theorems. *The Princeton Companion to Mathematics*, *25*, 693–696. https://doi.org/10.2307/2311404

Chen, C., & Zhu, C. (2013). Common fixed point theorems for weakly c-contractive mappings in partial metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 1–16. https://doi.org/10.22436/jnsa.009.01.04

Choudhury, B. S. (2009). Unique fixed point theorem for weakly C-contractive mappings. *Kathmandu University Journal of Science, Engineering and Technology*, *5*(I), 6–13. https://doi.org/10.17654/FJMSDec2015_897_914

Dhivya, P., & Marudai, M. (2017). Common fixed point theorems for mappings satisfying a contractive condition of rational expression on a ordered complex partial metric space. *Cogent Mathematics*, *4*, 1–10. https://doi.org/10.1080/23311835.2017.1389622

Gunaseelan, M., & Mishra, L. N. (2019). Coupled fixed point theorems on complex partial metric space using different type of contractive conditions. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar Series A: Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*, *11*(2), 117–123. https://doi.org/10.5937/spsunp1902117g

Harjani, J., López, B., & Sadarangani, K. (2011). Fixed point theorems for weakly C-contractive mappings in ordered metric spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, *61*(4), 790–796. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.027

Klin-Eam, C., & Suanoom, C. (2013). Some common fixed-point theorems for generalized-contractive-type mappings on complex-valued metric spaces. *Abstract and Applied Analysis*, *2013*, 1–6. https://doi.org/10.1155/2013/604215

Matthews, S. G. (1994). Partial Metric Topology. *Proceedings Eight Summer Conference on General Topology and Applications, in: Annals of the New York Academy of Sciences*, *728*, 183–197. https://doi.org/10.1016/j.topol.2012.11.004

Shatanawi, W. (2011). Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces. *Mathematical and Computer Modelling*, *54*(11–12), 2816–2826. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.06.069