BEBERAPA SIFAT FUNGSI-FUNGSI TERINTEGRALKAN HENSTOCK-KURZWEIL DI RUANG BERDIMENSI-N

(*SOME PROPERTIES OF HENSTOCK-KURZWEIL INTEGRABLE FUNCTIONS IN N-DIMENSIONAL SPACE*)

Elin Herlinawati[1]
[1]Universitas Terbuka, elin@ecampus.ut.ac.id

Abstrak
Integral Henstock-Kurzweil dapat dikatakan sebagai perumuman dari integral Riemann. Integral ini dikonstruksi berdasarkan partisi δ-fine yang didefinisikan dengan memodifikasi konstanta δ pada integral Riemann menjadi fungsi positif δ. Pada artikel ini, ditunjukkan sifat-sifat yang dipenuhi oleh fungsi-fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil khususnya di ruang berdimensi-n dengan menggunakan norm maksimum. Kemudian ditunjukkan pula bahwa setiap fungsi kontinu pada himpunan tertutup dan terbatas mengakibatkan fungsi tersebut terintegralkan Henstock-Kurzweil. Terakhir, ditunjukkan fakta bahwa hasil kali fungsi kontinu dan fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil tidak selalu merupakan fungsi yang terintegralkan Henstock-Kurzweil di ruang berdimensi-n.

Kata kunci: Henstock-Kurzweil, integral, ruang berdimensi-n.

Abstract
The Henstock-Kurzweil integral can be said to be a generalization of the Riemann integral. This integral was constructed based on the δ-fine partition defined by modifying the constant δ in the Riemann integration to be a positive function. In this article, we showed some properties that satisfied by the Henstock-Kurzweil integrable functions, especially, in n-dimensional spaces using the maximum norm. Then it is also discussed that every continuous function on a closed and bounded set causes the function to be integrated by Henstock-Kurzweil. Finally, it was showed that the product of the continuous function with the Henstock-Kurzweil integrable function is not always a Henstock-Kurzweil integrable function in the n-dimensional space.

Keywords: *Henstock-Kurzweil, integral, n-dimensional space.*

PENDAHULUAN

Teori integral muncul sekitar abad ke-19 yang diperkenalkan oleh Cauchy dan Riemann. Kemudian, Riemann mengkaji lebih mendalam tentang integral dan menemukan konsep yang sekarang dikenal sebagai integral Riemann. Konsep integral Riemann dimanfaatkan pada beberapa bidang keilmuan seperti matematika, fisika dan teknik. Perkembangan jenis-jenis fungsi pada area tersebut memberikan dampak adanya fungsi yang tidak terintegralkan Riemann pada $[\alpha,\beta]$ seperti fungsi Dirichlet pada $[0,1]$. Selanjutnya, Henri Lebesgue mengatasi hal tersebut dengan membangun integral berdasarkan ukuran sehingga fungsi Dirichlet menjadi terintegralkan pada [0,1] dengan konsep integral yang dibangun Lebesgue. Kemudian integral ini dikenal sebagai integral Lebesgue.

Pada perkembangannya, dengan mempelajari sifat-sifat integral Lebesgue, masih ditemukan adanya fungsi kontinu F pada [0,1] yang tak terintegralkan Lebesgue meskipun F' berhingga pada $[0,1]$. Untuk mengatasi hal tersebut, Denjoy dan Perron mendefinisikan integral yang lebih umum dari integral Lebesgue dan integral Riemann. Pada tahun 1957, Kurzweil memberikan definisi integral yang ternyata ekuivalen dengan integral Denjoy dan integral Perron. Disisi lain, pada tahun 1968, Henstock juga menyampaikan definisi yang ekuivalen dengan Kurzweil. Selanjutnya, integral ini dikenal sebagai integral Henstock Kurzweil (Yeong, 2011).

Penelitian mengenai integral Henstock-Kurzweil telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya mengkaji tentang integral improper dari Riemann dan hubungannya dengan integral Henstock di $\mathbb{R}^n$ (Muldowney & Skvortsov, 2005), linearitas integral Henstock-Pettis pada Ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ (Rahman, 2010), karakterisasi integral Henstock-Kurzweil di ruang Euclid (Yeong, 2011), integral Henstock-Kurzweil pada [a,b] (Afiyah, 2011), Teorema Kekonvergenan Seragam Integral Henstock-Kurzweil Fungsi Bernilai $C[a,b]$ (Ubaidillah et al., 2014), integral Henstock-Bochner dan integral Henstock-Dunford pada interval tertutup dan terbatas (Solikhin et al., 2017), dan beberapa sifat integral Henstock-Sekuensial (Malahayati, 2017). Pada artikel ini, dibahas mengenai sifat-sifat yang dipenuhi oleh fungsi-fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $\mathbb{R}^n$ dan beberapa sifat yang gagal dipenuhi oleh integral Henstock-Kurzweil di ruang berdimensi-n.

Selanjutnya, misalkan $x \in \mathbb{R}^n$, maka anggota dari $\mathbb{R}^n$ dinyatakan sebagai $x = (x_1, ..., x_n)$. Kemudian interval pada $\mathbb{R}^n$ direpresentasikan dalam bentuk $[\alpha, \beta] = \prod_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]$. Selanjutnya, didefinisikan norm maksimum $\|\cdot\|_\infty$ sebagai $\|x\|_\infty = maks\,\{|x_i| : i = 1,2, \dots, n\}$ untuk $x \in \mathbb{R}^n$. Misalkan diberikan $\tau > 0$, maka bola buka di $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai $B(x,\tau) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - z\|_\infty < \tau\}$ dengan $x - y = (x_i - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ untuk sebarang $y \in \mathbb{R}^n$.

Dengan menggunakan norm maksimum, akan dibahas mengenai integral Henstock-Kurzweil pada $\mathbb{R}^n$. Namun, perlu diketahui beberapa istilah yang digunakan pada integral Henstock-Kurzweil seperti disebutkan pada Definisi 1.

Definisi 1. (Yeong, 2011)

(i) Pasangan titik-interval (t, I) memuat titik $t \in \mathbb{R}^n$ dan interval I di $\mathbb{R}^n$.

(ii) Partisi dari $[\alpha, \beta]$ adalah koleksi berhingga $\{(t_1,[u_1, v_1]),...,(t_p,[u_p, v_p])\}$ dari pasangan titik-interval dengan $\{([u_1, v_1],...,[u_p, v_p]\}$ bagian dari $[\alpha, \beta]$ dan $t_k \in [u_k, v_k]$ untuk $k = 1, 2, ..., p$.

(iii) Misalkan $P = \{([u_1, v_1],...,[u_p, v_p]\}$ partisi pada $[\alpha, \beta]$ dan fungsi positif δ yang didefinisikan pada $\{t_1,...,t_p\}$, maka partisi P dikatakan $\delta - fine$ jika $[u_k, v_k] \subset B(t_k, \delta(t_k))$ $t_k \in [u_k, v_k]$ untuk $k = 1, 2, ..., p$.

Integral Henstock-Kurzweil dapat dikatakan sebagai perumuman dari integral

Riemann. Integral ini dibangun berdasarkan partisi $\delta - fine$ yang didefinisikan dari integral Riemann dengan memodifikasi konstanta $\delta > 0$ menjadi fungsi δ bernilai positif. Eksistensi dari $\delta - fine$ dijamin oleh Lemma 1.

Lemma 1 [Lemma Cousin](Yeong, 2011) Misalkan $\delta > 0$ merupakan suatu fungsi pada $[\alpha, \beta]$ maka terdapat sebuah partisi $\delta - fine$ dari $[\alpha, \beta]$.

Dari eksistensi partisi $\delta - fine$ pada setiap interval $[\alpha, \beta]$, didefinisikan integral Henstock-Kurzweil pada $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut.

Definisi 2 (Yeong, 2011) Misalkan $\mu([u_k, v_k]) = v_k - u_k$ menyatakan ukuran dari suatu interval $[u_k, v_k]$ untuk $k = 1, 2, \ldots, p$ dan $t_k \in [u_k, v_k]$ dan $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $I = [\alpha, \beta]$ jika terdapat $A \in \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut: jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka ada fungsi $\delta > 0$ pada I sehingga untuk setiap $\mathcal{P}$ partisi $\delta - fine$ dari I berlaku $|S(f, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon$ dengan

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{p} f(t_k)\mu([u_k, v_k]). \quad (1)$$

Koleksi dari semua fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[\alpha, \beta]$ dinotasikan sebagai $HK[\alpha, \beta]$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Beberapa sifat dari integral Henstock-Kurzweil yaitu sifat linearitas dan kemonotonan serta sifat-sifat lain yang berlaku dari fungsi-fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[\alpha, \beta]$ ditunjukkan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 1. Jika $f_1, f_2 \in HK[\alpha, \beta]$ maka $f_1 + f_2 \in HK[\alpha, \beta]$ dan

$$(HK)\int_{[\alpha,\beta]} (f_1 + f_2) = (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 + (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2. \quad (2)$$

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $f_1, f_2 \in HK[\alpha, \beta]$ maka terdapat fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada $[\alpha, \beta]$ sehingga untuk setiap P_1 partisi $\delta_1 - fine$ dari $[\alpha, \beta]$ berlaku

$$\left| S(f_1, P_1) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 \right| < \varepsilon/2 \quad (3)$$

dan untuk P_2 partisi $\delta_2 - fine$ dari $[\alpha, \beta]$ berlaku

$$\left| S(f_2, P_2) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2 \right| < \varepsilon/2. \quad (4)$$

Selanjutnya, pilih $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ dan partisi $P \supseteq P_1 \cup P_2$, maka berdasarkan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left| S(f_1 + f_2, P) - \left\{ (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 + (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2 \right\} \right| \\
&= \left| S(f_1, P) + S(f_2, P) - \left\{ (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 + (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2 \right\} \right| \\
&\leq \left| S(f_1, P) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 \right| + \left| S(f_2, P) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2 \right| \\
&\leq \left| S(f_1, P_1) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_1 \right| + \left| S(f_2, P_2) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f_2 \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (5)
\end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan definisi integral Henstock-Kurzweil, $f_1 + f_2 \in HK[\alpha, \beta]$ dan

$(HK)\int_{[\alpha,\beta]}(f_1+f_2)=(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_1+(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_2$. ■

Teorema 2. Jika $f\in HK[\alpha,\beta]$ dan $\gamma\in\mathbb{R}$ maka $\gamma f\in HK[\alpha,\beta]$ dan $(HK)\int_{[\alpha,\beta]}\gamma f=\gamma\left\{(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right\}$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dan $f\in HK[\alpha,\beta]$ maka ada fungsi $\delta_1:[\alpha,\beta]\to(0,\infty)$ sehingga untuk sebarang P_1 partisi $\delta-fine$ dari $[\alpha,\beta]$,

$$\left|S(f,P_1)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right|<{}^{\varepsilon}/_{(|\gamma|+1)}\,. \tag{6}$$

Pilih $\delta(x)=\delta_1(x)$ dan misalkan P partisi $\delta-fine$ dari $[\alpha,\beta]$, maka

$$\begin{aligned}\left|S(\gamma f,P)-\gamma\left\{(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right\}\right|&=\left|\gamma\{S(f,P)\}-\gamma\left\{(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right\}\right|\\&=|\gamma|\left|S(f,P)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right|\le|\gamma|\,{}^{\varepsilon}/_{(|\gamma|+1)}<\varepsilon.\end{aligned} \tag{7}$$

Jadi, $\gamma f\in HK[\alpha,\beta]$ dan $(HK)\int_{[\alpha,\beta]}\gamma f=\gamma\,(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f$.■

Teorema 3. Jika $f_1,f_2\in HK[\alpha,\beta]$ dengan $f_1(x)\le f_2(x)$ untuk semua $x\in[\alpha,\beta]$ maka $(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_1\le(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_2$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dan $f_1,f_2\in HK[\alpha,\beta]$ maka ada fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada $[\alpha,\beta]$ sehingga

$$\left|S(f_1,P_1)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_1\right|<\varepsilon \tag{8}$$

dan

$$\left|S(f_2,P_2)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_2\right|<\varepsilon \tag{9}$$

untuk setiap P_1 partisi δ_1-fine dan P_2 partisi δ_2-fine dari $[\alpha,\beta]$. Selanjutnya, pilih $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ dan P merupakan penghalusan partisi $\delta-fine$ dari $[\alpha,\beta]$, maka berdasarkan (8) dan (9) diperoleh

$$\left\{(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_1\right\}-\varepsilon<S(f_1,P)\le S(f_2,P)<\left\{(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_2\right\}+\varepsilon. \tag{10}$$

Karena berlaku untuk sebarang ε maka $(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_1\le(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f_2$. ■

Hubungan keterintegralan Henstock-Kurzweil antara suatu fungsi dan fungsi absolutnya ditunjukkan dalam dua teorema berikut.

Teorema 4. Jika $f,|f|\in HK[\alpha,\beta]$ maka $\left|(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right|\le(HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dan $f,|f|\in HK[\alpha,\beta]$ maka ada fungsi positif δ_1 dan δ_2 pada $[\alpha,\beta]$ sehingga

$$\left|S(f,P_1)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right|<\varepsilon/2 \tag{11}$$

dan

$$\left|S(|f|,P_2)-(HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|\right|<\varepsilon/2 \tag{12}$$

untuk setiap P_1 partisi δ_1-fine dan P_2 partisi δ_2-fine dari $[\alpha,\beta]$. Selanjutnya, pilih $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ dan P_3 partisi $\delta-fine$ dari $[\alpha,\beta]$.

Karena $-|f|\le f\le|f|$, Teorema 2, Teorema 3, dan sifat nilai mutlak, diperoleh ketaksamaan $\left|(HK)\int_{[\alpha,\beta]}f\right|\le(HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|$.■

Teorema 5. Misalkan $|f|$ terintergralkan Henstock-Kurzweil pada $[\alpha,\beta]$ maka f juga terintergralkan Henstock-Kurzweil pada $[\alpha,\beta]$.
Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $|f| \in HK[\alpha,\beta]$. Karena $|f|$ terintegralkan HK maka terdapat fungsi positif δ pada $[\alpha,\beta]$ sehingga untuk setiap partisi P dari $\delta - fine$ pada $[\alpha,\beta]$ berlaku

$$\left|S(|f|,P) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Kemudian karena $f \leq |f|$, berdasarkan Teorema 3, diperoleh

$$(HK)\int_{[\alpha,\beta]} f \leq (HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|. \tag{14}$$

Karena (13) dan (14), diperoleh

$$\left|S(f,P) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]} f\right| \leq \left|S(|f|,P) - (HK)\int_{[\alpha,\beta]}|f|\right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Berdasarkan definisi, maka $f \in HK[\alpha,\beta]$. ■

Perhatikan bahwa konvers dari Teorema 5 tidak berlaku. Ini berarti, jika suatu fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil maka mutlak dari fungsi tersebut belum tentu terintegralkan Henstock-Kurzweil seperti yang ditunjukkan pada Contoh 1.

Contoh 1. Misalkan $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k}}{k+1} \chi_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2}(\xi,\eta)\sin(2^{2k}\pi\xi)\sin(2^{2k}\pi\eta) \tag{16}$$

maka $|f| \notin HK([0,1]^2)$.
Bukti. Ambil sebarang $k \in \mathbb{N}$, maka

$$\begin{aligned}(HK)\int_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2} |f| &= (HK)\int_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k}}{k+1} \chi_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2}(\xi,\eta)\sin(2^{2k}\pi\xi)\sin(2^{2k}\pi\eta)\right| d(\xi,\eta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(HK)\int_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2} \frac{2^{4k}}{k+1}\left|\sin(2^{2k}\pi\xi)\sin(2^{2k}\pi\eta)\right| d(\xi,\eta)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{4k}}{k+1}\left(\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \left|\sin(2^{2k}\pi x)\right| dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k}}{k+1}.\end{aligned} \tag{17}$$

Karena deret $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k}}{k+1}$ divergen, maka $(HK)\int_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2} |f|$ tidak ada. Hal ini menunjukkan bahwa $|f| \notin HK([0,1]^2)$. ■

Kemudian, keintegralan fungsi Henstock-Kurzweil juga berlaku untuk sifat penjumlahan pada subinterval dari $[\alpha,\beta]$.

Teorema 6. Jika $f \in HK[\alpha,\xi]$ dan $f \in HK[\xi,\beta]$ maka $f \in HK[\alpha,\beta]$ dan

$$(HK)\int_{[\alpha,\beta]} f = (HK)\int_{[\alpha,\xi]} f + (HK)\int_{[\xi,\beta]} f. \tag{18}$$

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $f \in HK[\alpha,\xi]$ dan $f \in HK[\xi,\beta]$ maka terdapat fungsi positif δ_1 pada $[\alpha,\xi]$ dan δ_2 pada $[\xi,\beta]$ sehingga

$$\left| S(f,P_1) - (HK)\int_{[a,\xi]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{19}$$

dan

$$\left| S(f,P_2) - (HK)\int_{[\xi,\beta]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

untuk setiap P_1 partisi $\delta_1 - fine$ dari $[\alpha,\xi]$ dan P_2 partisi $\delta_2 - fine$ dari$[\xi,\beta]$. Selanjutnya, pilih

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta_1(x), \frac{1}{2}(\xi - x)\right\}, & \text{untuk } x \in [\alpha,\xi) \\ \min\left\{\delta_2(x), \frac{1}{2}(x - \xi)\right\}, & \text{untuk } x \in (\xi,\beta] \\ \min\left\{\delta_1(x), \delta_1(x)\right\}, & \text{untuk } x = \xi \end{cases} \tag{21}$$

dan P partisi $\delta - fine$ dari $[\alpha,\beta]$ maka

$$\begin{aligned} \left| S(f,P) - \left\{ (HK)\int_{[\alpha,\xi]} f + (HK)\int_{[\xi,\beta]} f \right\} \right| &= \left| S(f,P_1) + S(f,P_2) - \left\{ (HK)\int_{[\alpha,\xi]} f + (HK)\int_{[\xi,\beta]} f \right\} \right| \\ &\le \left| S(f,P_1) + (HK)\int_{[\alpha,\xi]} f \right| + \left| S(f,P_2) + (HK)\int_{[\xi,\beta]} f \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{22}$$

Jadi, $f \in HK[\alpha,\beta]$ dan $(HK)\int_{[\alpha,b\beta]} f = (HK)\int_{[\alpha,\xi]} f + (HK)\int_{[\xi,\beta]} f(HK)$. ■

Selanjutnya, diberikan syarat cukup dan perlu suatu fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil pada $[\alpha,\beta]$ pada Lemma 2.

Lemma 2 (Kriteria Cauchy) (Yeong, 2011)**.** Fungsi $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ termuat di $HK[\alpha,\beta]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada fungsi $\delta: [\alpha,\beta] \to (0,\infty)$ sehingga untuk setiap P dan Q partisi-partisi $\delta - fine$ dari $[\alpha,\beta]$ berlaku $|S(f,P) - S(f,Q)| < \varepsilon$.

Lemma 2 digunakan untuk membuktikan salah satu karakterisasi fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil yaitu fungsi-fungsi kontinu pada integral tertutup dan terbatas menyebabkan fungsi tersebut terintegralkan Henstock-Kurzweil pada interval tersebut, seperti yang ditunjukkan pada Teorema 7.

Teorema 7 (Yeong, 2011)**.** Misalkan $f \in C[\alpha,\beta]$ maka $f \in HK[\alpha,\beta]$
Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu untuk setiap $x \in [\alpha,\beta]$ maka dapat dipilih $\delta(x) > 0$ sehingga

$$\left| f(x) - f(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2\prod_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)} \tag{23}$$

dengan $y \in [\alpha,\beta] \cap (x-\delta(x), x+\delta(x))$.
Perhatikan bahwa fungsi yang memetakan x kedalam $\delta(x)$ pada $[\alpha,\beta]$ merupakan sebuah fungsi positif sehingga berdasarkan Lemma Causin, dapat dipilih $\delta - fine$ dari $[\alpha,\beta]$. Misalkan P_1 dan P_2 merupakan dua partisi dari $\delta - fine$ pada $[\alpha,\beta]$, dengan $P_1 = \{(t_1, I_1),\ldots,(t_p, I_p)\}$ dan $P_2 = \{(w_1, J_1),\ldots,(w_q, J_q)\}$. Jika $I_r \cap J_k$ tidak kosong untuk suatu $r = \{1,2,\ldots,p\}$ dan $k = \{1,2,\ldots,q\}$, pilih $z_{r,k} \in I_r \cap J_k$. Jika $I_r \cap J_k = \emptyset$ untuk suatu $r = \{1,2,\ldots,p\}$ dan $k = \{1,2,\ldots,q\}$, pilih $z_{r,k} = \alpha$. Maka dari ketaksamaan (23), diperoleh

$$\begin{aligned}
\left| S(f,P_1) - S(f,P_2) \right| &= \left| \sum_{j=1}^{p} f(t_j)\mu_n\left(I_j\right) - \sum_{k=1}^{q} f(w_k)\mu_n\left(J_k\right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} f(t_j)\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) - \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} f(w_k)\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} f(t_j)\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} f(z_{j,k})\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} f(w_k)\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} f(z_{j,k})\mu_n\left(I_j \cap J_k\right) \right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned} \tag{24}$$

Jadi, berdasarkan Lemma 2, fungsi $f \in HK[\alpha,\beta]$. ■

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 7, sebarang fungsi kontinu pada $[\alpha,\beta]$ terintegralkan Henstok-kurzweil. Tetapi, jika salah satu fungsi merupakan fungsi di $HK[\alpha,\beta]$ maka perkalian kedua fungsi tersebut belum tentu terintegralkan Henstock-Kurzweil.

Lemma 3. Jika $f \in HK[\alpha,\beta]$, F merupakan integral Henstock-Kurzweil tak terhingga dari f dan $\mathcal{I}_n([\alpha,\beta])$ koleksi semua subinterval dari $[\alpha,\beta]$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\eta > 0$ sehingga

$$\left| F(I) - F(J) \right| < \varepsilon \tag{25}$$

untuk setiap $I, J \in \mathcal{I}_n([\alpha,\beta])$ dengan $\mu_n(I\Delta J) = \mu_n(I) + \mu_n(J) - \mu(I \cap J) < \eta$.

Lemma 3 digunakan untuk membuktikan contoh berikut mengenai perkalian dua fungsi yang belum tentu terintegralkan Henstock-Kurzweil.

Contoh 2. Misalkan $f, g: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4k}}{k+1}\chi_{[2^{-k-1},2^{-k}]^2}(\xi,\eta)\sin(2^{2k}\pi\xi)\sin(2^{2k}\pi\eta) \quad (26)$$

dan

$$g(\xi,\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\sin^3(2^{2k}\pi\xi)\sin^3(2^{2k}\pi\eta) \quad (27)$$

maka $f\cdot g\notin HK([0,1]^2)$.

Bukti. Andaikan $f\cdot g\in HK([0,1]^2)$ maka untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ berlaku

$$\begin{aligned}(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^n}\right]^2} fg-(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^{2n}}\right]^2} fg &= \sum_{k=n}^{2n-1}\left\{(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^k}\right]^2} fg-(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^{k+1}}\right]^2} fg\right\}\\ &=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{2^{2k}}{k+1}\left\{\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\sin^4(2^{2k}\pi x)dx\right\} \quad (28)\\ &\geq\frac{9}{128}.\end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi dengan Lemma 2, yaitu

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^n}\right]^2} fg-(HK)\int_{\left[0,\frac{1}{2^{2n}}\right]^2} fg\right\}=0. \quad (29)$$

Jadi, haruslah $f\cdot g\notin HK([0,1]^2)$.

KESIMPULAN

Integral Henstock-Kurzweil dapat dikatakan sebagai perumuman dari integral Riemann. Integral ini dibangun berdasarkan partisi $\delta - fine$ yang didefinisikan dengan memodifikasi konstanta $\delta > 0$ pada integral Riemann menjadi fungsi δ positif dan Lemma Causin menjamin eksistensi partisi $\delta - fine$. Kemudian, dari definisi integral Henstock-Kurzweil di ruang berdimensi-n, telah dibuktikan bahwa sifat kelinearan dan kemonotonan berlaku pada integral Henstock-Kurzweil, serta hubungan antara fungsi kontinu pada $[\alpha,\beta]$ dengan fungsi terintegralkan Henstock-Kurzweil, yaitu jika $f \in$ C$[\alpha,\beta]$ maka $f \in$ HK$[\alpha,\beta]$. Kemudian, fakta lain yang telah ditunjukkan adalah bahwa walaupun $f \in HK[\alpha,\beta]$ namun mutlak dari fungsi tersebut dan perkalian antara fungsi di $HK[\alpha,\beta]$ dan $C[\alpha,\beta]$ belum tentu terintegralkan Henstock-Kurzweil pada ruang berdimensi-n.

DAFTAR RUJUKAN

Afiyah, S. N. (2011). Henstock-Kurzweil Integral on [a,b]. *Cauchy*, *2*(1), 24.

https://doi.org/10.18860/ca.v2i1.1805

Malahayati, M. (2017). Beberapa Sifat Integral Henstock Sekuensial. *Jurnal Fourier*, *6*(2), 55. https://doi.org/10.14421/fourier.2017.62.55-68

Muldowney, P., & Skvortsov, V. A. (2005). Improper Riemann integral and Henstock integral in ℝn. *Mathematical Notes, 78*(1–2), 228–233. https://doi.org/10.1007/s11006-005-0119-7

Rahman, H. (2010). Linieritas Integral Henstock-Pettis pada Ruang Euclide Rn. In *Cauchy* (Vol. 1, Issue 2). https://doi.org/10.18860/ca.v1i2.1705

Solikhin, Sumanto, Y. D., Hariyanto, S., & Aziz, A. (2017). Syarat Perlu Dan Cukup Integral Henstock-bochner Dan Integral Henstock-dunford Pada [A, b]. *Jurnal Matematika Undip*, *20*(1), 45–52.

Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., & Indrati, R. (2014). Integral Henstock-Kurzweil Fungsi Bernilai C [a , b]: Teorema Kekonvergenan Seragam. *Prosiding KNM XVII*, 1–7.

Yeong, L. T. (2011). Henstock-Kurzweil Integration on Euclidean Spaces. In *World Scientific* (Vol. 12).