PERBANDINGAN METODE BOOTSTRAP DAN JACKKNIFE DALAM MENGESTIMASI PARAMETER REGRESI LINIER BERGANDA

(*COMPARISON OF BOOTSTRAP AND JACKKNIFE METHODS TO ESTIMATE MULTIPLE LINEAR REGRESSION PARAMETERS*)

Iesyah Rodliyah
Universitas Hasyim Asy'ari
iesyah_rodliyah@yahoo.co.id

Abstrak

Metode Bootstrap dan Jackknife merupakan dua metode yang digunakan untuk mengestimasi suatu distribusi populasi yang tidak diketahui dengan distribusi empiris yang diperoleh dari proses penyampelan ulang. Perbandingan estimasi parameter regresi linier berganda dengan menggunakan metode Bootstrap dan Jackknife menunjukkan bahwa meskipun terjadi heteroskedastisitas error, metode Jackknife memperoleh estimator dari bias, standar error, serta batas atas dan batas bawah interval konfidensi untuk parameter regresi tidak jauh berbeda dengan hasil yang diperoleh dengan metode kuadrat terkecil atau lebih tepatnya metode Generalized Least Square dan lebih baik dibandingkan dengan metode Bootstrap. Dari pembahasan juga diketahui bahwa kelebihan dari kedua metode ini adalah mengabaikan asumsi apapun mengenai distribusi error, namun hasilnya hampir sama.

Kata kunci: *Resampling, Regresi Bootstrap, Regresi Jackknife*

Abstract

Bootstrap and Jackknife methods are two methods used to estimate an unknown population distribution with the empirical distribution obtained from the process of resampling Comparison of parameter estimation using multiple linear regression method of Bootstrap and Jackknife shows despite error heteroskedasticity, Jackknife method to obtain an estimator of the bias, standard errors, as well as the upper limit and lower limit confidence interval for the regression parameters are not much different from the results obtained by the method of least squares, or more precisely Generalized least Square method and better than the Bootstrap method. From the discussion is also known that the advantages of both methods is to ignore any assumption about the distribution of errors, but the results are almost identical.

Keywords: *Resampling, Bootstrap Regression, Jackknife Regression*

PENDAHULUAN

Di dalam ilmu statistik sering seorang peneliti menghadapi suatu masalah karena memperoleh jumlah sampel yang kecil dalam suatu pemodelan dan dikhawatirkan parameter yang diperoleh bias, *underestimate* atau *overestimate*. Masalah bias yang sering dihadapi para peneliti ini dapat diatasi dengan berbagai metode untuk mengestimasi bias, diantaranya metode Jackknife yaitu suatu metode nonparametrik untuk mengestimasi bias yang diperkenalkan oleh Quenouille pada tahun 1949 (Sprent: 1991). Selain dengan metode Jackknife, terdapat metode Bootstrap yang merupakan modifikasi dari metode Jackknife yang diperkenalkan oleh Efron untuk mengestimasi parameter dari sebaran yang tidak diketahui bentuknya pada pertengahan 1970.

Metode Bootstrap adalah metode berbasis *resampling* data sampel dengan syarat pengembalian pada datanya dalam menyelesaikan statistik ukuran suatu sampel dengan harapan sampel tersebut mewakili data populasi sebenarnya, biasanya ukuran resampling diambil secara ribuan kali agar dapat mewakili data populasinya. Bootstrap memungkinkan seseorang untuk melakukan inferensi statistik tanpa membuat asumsi distribusi yang kuat dan tidak memerlukan formulasi analitis untuk distribusi sampling suatu estimator.

Masing-masing metode ini mempunyai kelebihan dan kekurangan. Kelebihan pada kedua metode ini (Bootstrap dan Jackknife) yaitu dapat digunakan pada jumlah sampel yang kecil atau insufficient, distribusi datanya tidak diketahui, dan ketelitian pengukuran estimasi parameter yang akurat. Namun secara konseptual metode Bootstrap lebih sederhana daripada Jackknife. Dalam Jackknife, biasanya kita menghitung estimasi parameter dari sampel lengkap dan *n* estimasi berikutnya dengan menghilangkan satu pengamatan. Sedangkan estimasi Bootstrap, bahkan untuk sampel kecil, kita dapat menghitung sesuatu dari seratus sampel untuk beberapa ratus estimasi dengan sebuah parameter pengamatan, sehingga implementasinya merupakan pekerjaan yang besar bagi komputer.

Suat & Dervis (2007) menuliskan hasil penelitiannya tentang algoritma resampling Bootstrap dan Jackknife. Mereka meneliti dan menuliskan temuannya tentang estimasi regresi linier dengan menggunakan aplikasi *resampling* metode Bootstrap dan Jackknife, dimana pada penelitian tersebut berfokus pada ilustrasi dan penerapan teknik *resampling* Bootstrap dan Jackknife dalam mengestimasi parameter regresi dengan metode OLS agar memperoleh hasil estimasi yang lebih baik. Dalam penelitian tersebut, dijelaskan contoh numerik nyata pada Bootstrap dan Jackknife yang dapat dijelaskan oleh linier model regresi dan dibandingkan hasilnya dengan *Ordinary Least Squares*. Penelitian ini bisa dikembangkan dengan mengubah obyek penelitian, yaitu mengubah obyek pembanding yang semula OLS (*Ordinary Least Square*) dengan metode GLS (*Generalized Least Square*), karena pada penelitian ini terfokus untuk menganalisis metode terbaik dari Bootstrap dan Jackknife pada kasus heteroskedastisitas yang kemudian akan dibandingkan dengan metode GLS.

Metode GLS merupakan pengembangan dari OLS. Sering kali terjadi penyimpangan estimasi ketika menggunakan metode OLS, salah satunya terjadi heteroskedastisitas (nilai variansi tidak konstan). Apabila penyimpangan ini terjadi maka akan dihasilkan estimasi yang tidak bias, konsisten namun tidak efisien. Maka harus digunakan metode kuadrat terkecil yang merupakan pengembangan dari kuadrat terkecil yang bisa digunakan pada data yang homoskedastisitas dan juga bisa digunakan untuk mengatasi heteroskedastisitas supaya tetap mendapatkan estimasi yang tidak bias, konsisten dan efisien yaitu metode Kuadrat Terkecil Umum.

KAJIAN TEORI

Analisis Regresi Berganda

Analisis regresi berganda (*multiple regression analysis*) atau regresi lebih dari dua variabel mempelajari ketergantungan suatu variabel tak bebas pada lebih dari satu variabel bebas. Model regresi berganda dinyatakan sebagai berikut.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i, i = 1,2,3, \dots N$$

dimana :

Y_i : variabel tak bebas (*dependent variable*)

X_{ji} : variabel bebas (*independent variable*) dengan $j = 1,2, \dots, k$

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$: parameter konstanta/ intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

ε : variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$

N : banyaknya data observasi

(Firdaus, 2004 : 25).

Estimasi Parameter

Estimasi merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk mengestimasi atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Estimator adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimasi terhadap data dari suatu contoh disebut nilai estimasi (Yitnosumarto, 1990 : 211-212). Estimator memiliki sifat tak bias (*unbiased*), efisien, dan konsisten. Suatu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah, estimasi haruslah “mendekati” nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi tersebut. Misalkan parameter kita β (kita gunakan parameter β agar tidak terikat pada parameter μ dan σ^2 misalnya). Jika $\hat{\beta}$ merupakan estimasi tak bias (unbiased estimator) dari parameter β, maka E($\hat{\beta}$)= β.

Syarat kedua dalam estimasi adalah estimasi yang dipilih harus merupakan estimasi yang efisien. Untuk menjelaskan hal ini, misalkan mempunyai dua estimasi untuk parameter β, katakanlah $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$. untuk tiap-tiap estimasi, karena merupakan peubah acak, maka ia mempunyai ragam sendiri-sendiri. Sebagai misal, $\bar{X}$ mempunyai ragam sebesar $\frac{\sigma^2}{n}$ jika $\bar{X}$ tersebut merupakan nilai tengah yang diambil dari populasi dengan ragam σ^2 dan atas dasar sampel berukuran n. Jika ragam $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ masing-masing sebesar $V(\hat{\beta}_1)$ dan $V(\hat{\beta}_2)$ maka $\hat{\beta}_1$ dikatakan lebih efisien dari $\hat{\beta}_1$, apabila

$$\frac{\mathrm{V}(\hat{\beta}_1)}{\mathrm{V}(\hat{\beta}_2)} < 1$$

atau dengan pernyataan lain, bila ragam untuk $\hat{\beta}_1$ lebih kecil dibanding dengan $\hat{\beta}_2$.

Bila suatu estimasi, $\bar{X}$ misalnya semakin mendekati parameter yang diestimasi, maka estimasi tersebut dinamakan estimasi yang konsisten, karena

$$\bar{X} \to \mu \text{ dengan } n \to \infty$$

atau, dengan pernyataan peluang, jika :

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon)=1$$

maka $\bar{X}$ merupakan estimasi yang konsisten (Yitnosumarto, 1990:212).

Kuadrat Terkecil (Least Square)

Metode kuadrat terkecil adalah salah satu metode yang paling populer dalam mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah dalam hitungan masalah astronomo oleh Carl F. Gauss.

Persamaan $Y_i = \beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_kX_{ki}+\varepsilon_i, i=1,2,3,\ldots N$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$Y = X\beta+\varepsilon$$

dimana :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1\\ Y_2\\ Y_3\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1}\\ 1 & X_{12} & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2}\\ 1 & X_{13} & X_{23} & X_{33} & \cdots & X_{k3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn}\end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}}_{\varepsilon}$$

Minimumkan :

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2$$

$$= [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n]\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

$$=\varepsilon^T\varepsilon$$

jadi

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \varepsilon^T\varepsilon$$
$$= (Y-X\beta)^T(Y-X\beta$$
$$= (Y^T-\beta^TX^T)(Y-X\beta)$$
$$= Y^TY - Y^TX\beta - \beta^TX^TY + \beta^TX^TX\beta$$
$$= Y^TY - (Y^TX\beta)^T - \beta^TX^TY + \beta^TX^TX\beta$$
$$= Y^TY - \beta^TX^TY - \beta^TX^TY + \beta^TX^TX\beta$$
$$= Y^TY - 2\beta^TX^TY + \beta^TX^TX\beta$$

Penaksir kuadrat terkecil harus memenuhi :

$$\left.\frac{\partial(\varepsilon^T\varepsilon)}{\partial\beta}\right|_{\hat{\beta}} = -2X^TY+2X^TX\beta = 0$$

$$X^TX\beta = X^TY$$

karena X^TX matriks non singular, maka X^TX mempunyai invers sehingga penaksir untuk β adalah :

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY$$

Kuadrat Terkecil Biasa (*Ordinary Least Square*) merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Dalam penggunaan regresi, terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linear tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil biasa (*Ordinary Least Square*) atau biasa dikenal dengan regresi OLS agar estimasi koefisien regresi itu bersifat BLUE yakni best, linier, tidak bias (unbiased) estimator.

Untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - X\beta$ sekecil mungkin, maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = \varepsilon^T\varepsilon = (Y - X\beta)^T(Y - X\beta)$$

sekecil mungkin (minimal). Karena nilai S tersebut skalar maka:

$$\begin{aligned} S &= (Y - X\beta)^T(Y - X\beta) \\ &= (Y^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - (Y^T X\beta)^T - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - \beta^T X^T Y - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \end{aligned}$$

untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2X^T Y + X^T X\beta + (\beta^T X^T X)^T \\ &= -2X^T Y + X^T X\beta + X^T X\beta \\ &= -2X^T Y + 2X^T X\beta \end{aligned}$$

dan kemudian menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X^T Y = X^T X\beta$$

yang dinamakan persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Generalized Least Square (GLS) sebagai salah satu bentuk dari pengembangan estimasi *least square*, merupakan bentuk estimasi yang dibuat untuk mengatasi sifat heteroskedastisitas yang memiliki kemampuan untuk mempertahankan sifat efisiensi estimatornya tanpa harus kehilangan sifat unbiased dan konsistensinya.

Penaksir parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier yang umum, persamaan $Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$ atau $PY = PX\beta + P\varepsilon$ dimana $PP^T = \emptyset^{-1}$ disebut sebagai GLS (Generalized Least Square), yaitu :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{gls} &= (X^{*T} X^*)^{-1} X^{*T} Y^* \\ &= (PX)^T PX)^{-1} (PX)^T PY \\ &= (X^T \emptyset^{-1} X)^{-1} X^T \emptyset^{-1} Y \\ &= \sigma^2 (X^T \Psi^{-1} X)^{-1} X^T \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \Psi^{-1} Y \\ &= (X^T \Psi^{-1} X)^{-1} X^T \Psi^{-1} Y \end{aligned}$$

(Kariya dan Kurata, 2004:34).

Selang Kepercayaan

Selang kepercayaan dapat digunakan sebagai taksiran suatu parameter dan dapat pula dipandang sebagai pengujian hipotesis, yaitu apakah suatu parameter sama dengan suatu nilai tertentu. Di bawah anggapan bahwa galat ε_i berdistribusi normal, untuk setiap i. maka statistik β_0 dan β_1 juga akan berdistribusi normal (Sembiring, 1995:52). Selang kepercayaan yang cukup baik adalah selang kepercayaan yang mempunyai lebar selang yang sempit dan persentase selang yang memuat parameter cukup besar (Koopmans, 1987).

Metode Bootstrap dan Jackknife

Quenoulille (1949) dalam buku Sprent memperkenalkan metode non-parametrik untuk mengestimasi bias yang sekarang dikenal sebagai Jackknife.Ini juga memberikan metode tentang estimasi varians sebuah estimasi parameter. Prosedur yang erat hubungannya dengan Jackknife, dan lebih umum berguna untuk melakukan estimasi varians dari parameter adalah sebuah prosedur yang disebut Bootstrap**.** Bootstrap dapat juga digunakan untuk memperoleh selang kepercayaan nilai parameter yang sebenarnya (Sprent, 1991:246).

Metode Jackknife dalam regresi berganda, akan berhubungan dengan bias dalam mengestimasi koefisien regresi, khususnya dalam keadaan tidak normal, atau regresi yang tidak linear. Pembahasan ini dapat mencakup setiap estimasi parameter, seperti rata-rata, varians, simpangan baku, rasio rata-rata, koefisien, korelasi, koefisien regresi atau lainnya. Parameter yang akan diestimasi, dinotasikan sebagai θ ; ditulis $\hat{\theta}$ untuk estimasi θ, dan $\tilde{\theta}$ untuk estimasi Jackknife yang didefinisikan di bawah ini :

Dengan sebuah sampel berukuran n pengamatan, pertama-tama menghitung $\hat{\theta}$ untuk seluruh n pengamatan, kemudian mengulangi perhitungan ini dengan menghilangkan x_1, dan memperoleh sebuah estimasi yang dinotasikan dengan $\hat{\theta}_{(1)}$. Sebuah operasi jenis ini dilakukan sebanyak n kali, dengan menghilangkan pada masing-masing tahap satu pengamatan (atau dalam kasus data dengan dua variabel, yang dihilangkan satu titik pengamatan (x_i, y_i) dan pada data dengan peubah ganda adalah analog). Estimasi dengan menghilangkan pengamatan i dinotasikan oleh $\hat{\theta}_{(i)}$, dan rata-rata dari $\hat{\theta}_{(1)}$ oleh $\hat{\theta}_{(.)}$; yaitu $\hat{\theta}_{(.)} = \sum_i \frac{\hat{\theta}_{(i)}}{n}$. Estimasi Jackknife terhadap $\tilde{\theta}$ dari θ adalah

$$\tilde{\theta} = n\hat{\theta} - (n-1)\,\hat{\theta}_{(.)}$$

Estimasi Jackknife tentang bias adalah :

$$b = (\ \mathrm{n} - 1\ )(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta})$$

Tukey (1958) dalam buku Sprent mengusulkan sebuah estimasi Jackknife untuk varians estimasi parameter $\hat{\theta}$ dimana $\hat{\theta}$ adalah statistik sampel yang sama dengan parameter populasi yang diperkirakan. Estimasi ini dirumuskan sebagai berikut :

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = (n-1)\sum_i \frac{\left(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_{(.)}\right)^2}{n}$$

Prosedur Bootstrap kemudian diterangkan dengan metode Monte Carlo di mana dibangkitkan m sampel Bootstrap (dalam praktek m biasanya paling sedikit 100), untuk masing-masing sampel ini dihitung nilai θ^*. Misalkan bahwa untuk sampel ke-i menjadi ${\theta^*}_i$. dengan menotasikan rata-rata dari seluruh m estimasi Bootstrap oleh ${\theta^*}_{(.)}$ estimasi varians Bootstrap untuk θ^* diberikan dengan

$$V^*\,(\theta^*) = \left[\sum_i ({\theta^*}_i - {\theta^*}_{(.)})\right](m-1)$$

Bila m→ ∞, ini konvergen untuk varians Bootstrap dari estimasi sampel $\hat{\theta}$, dimana $\hat{\theta}$ adalah estimasi parameter populasi yang diamati.

Standar Error

Estimasi standar error adalah ukuran penyebaran (dispersi) data dari garis yang paling tepat. Dengan estimasi standar error (Se), dapat dihitung interval konfidensi (sekitar nilai estimasi untuk variabel independen) untuk tingkat-tingkat konfidensi yang berbeda. Interval konfindensi adalah kisaran nilai-nilai dimana observasi aktual diharapkan terletak dalam prosentase tertentu pada waktu tertentu. (Rini, 2002:8)

Estimasi standar error dapat dihitung dengan rumus berikut :

$$Se = \sqrt{\frac{\sum Y^2 = \propto \sum Y - \beta \sum YX}{n-2}}$$

Koefisien standar error adalah ukuran atau ketetapan nilai βyang telah dihitung, yang merupakan koefisien yang mengestimasi hubungan marjinal antara variabel Y dan variabel X. Semakin kecil koefisien standar error, semakin besar keyakinan akan koefisien regresi yang diperoleh dari data nilai-nilai **X** dan nilai **Y.** Koefisien standar error dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Koef.Se = \frac{Se}{\sqrt{\sum Y^2 - \propto \sum Y - \beta \sum YX}}$$

(Rini, 2002:8)

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada pustaka atau buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan untuk melakukan penelitian ini. Sifat penelitian ini adalah penelitian perpustakaan (*library research*) yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam materi yang terdapat dalam perpustakaan. Seperti buku, majalah, dokumen catatan dan kisah-kisah sejarah lainnya.

Data yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diambil dari skripsi Ana Syukria (2011) yang berjudul "Analisis Uji Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda."

Dalam menganalisis data penelitian ini, penulis menyusun langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan dan mempelajari pustaka-pustaka yang berkenaan dengan materi penelitian seperti regresi linier berganda, heteroskedastisitas, *GLS/WLS*, regresi *Bootstrap*, regresi *Jackknife*, bias, varians, standar *error,* dan interval kepercayaan *Bootstrap* dan *Jackknife*.

2. Menganalisis dan menyusun hasil langkah pertama yang mencakup tentang :
   a. Konsep dasar *Bootstrap* dan *Jackknife* pada regresi linier berganda
   b. Cara mengestimasi parameter model regresi linier berganda dengan regresi *Bootstrap* dan regresi *Jackknife*
   c. Analisis algoritma *regresi* Bootstrap dan regresi *Jackknife* serta menterjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan Macro Minitab.
3. Mengaplikasikan metode regresi *Bootstrap* dan regresi *Jackknife* pada kasus jarak tempuh mobil yang diambil dari skripsi Ana Syukriah dengan judul "Analisis Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda" yang telah dilakukan penelitian sebelumnya oleh beliau yaitu mengestimasi parameter regresi pada kasus heteroskedastisitas dengan metode GLS dengan menggunakan program Eviews. Selanjutnya akan dilanjutkan dengan menggunakan dua metode lain yang lebih sederhana yaitu metode *Bootstrap* dan *Jackknife.*
4. Mengestimasi parameter regresi dengan metode resampling *Bootstrap*, yaitu :
   a. Mengambil sampel dari data yang diperoleh dengan pengembalian sebanyak n data dan diulang sebanyak B kali.
   b. Mengestimasi parameter β_0, β_1,β_2, danβ_3, dengan metode kuadrat terkecil.
5. Mengestimasi parameter regresi dengan metode resampling Jackknife, dengan cara :
   a. Mengambil satu kali sampel acak sebanyak data dengan pengembalian. Dari sampel acak tersebut, kemudian dilakukan regresi sebanyak n kali, dimana n adalah banyaknya data dengan menghilangkan data pasangan ke-i untuk setiap regresinya, sehingga terdapat $n - 1$ di setiap melakukan regresi.
   b. Mengestimasi parameter β_0, β_1,β_2, danβ_3,
6. Membandingkan hasil dari metode regresi *Bootstrap* dan *Jackknife* dengan hasil estimasi parameter regresi metode *GLS*.
7. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Implementasi Regresi Bootstrap dan Regresi Jackknife dengan Bantuan Macro Minitab

Algoritma Regresi Bootstrap

1. Input data regresi
2. Hitung estimator koefisien regresi dengan rumus kuadrat terkecil (2.2)
3. Lakukan pengambilan sampel satu persatu dengan pengembalian sebanyak n kali
4. Hitung estimator koefisien regresi dengan rumus (3.4) pada sampel baru
5. Ulangi langkah 3 dan 4 sebanyak r, $r = 1,2,3, \ldots, B$
6. Tentukan bias, batas atas dan batas bawah interval kepercayaan serta standar error untuk masing-masing parameter sesuai dengan taraf α

Algoritma Regresi Jackknife

1. Input data regresi
2. Hitung estimator koefisien regresi dengan rumus kuadrat terkecil (2.2)

3. Hapus pasangan data ke-i untuk memperoleh sampel baru ke-i
4. Hitung estimator koefisien regresi dengan rumus (3.13) pada sampel baru
5. Ulangi langkah 3 dan 4 sebanyak i, $i = 1,2,3, \dots, n$
6. Tentukan bias, batas atas dan batas bawah interval kepercayaan serta standar error untuk masing-masing parameter sesuai dengan taraf α

Implementasi Metode Bootstrap dan Metode Jackknife pada Kasus Heteroskedastisitas

Data yang dipakai dalam penelitian ini adalah data rincian dari 40 mobil yang memuat jarak tempuh mobil yang didukung oleh satu gallon bahan bakar (MGP), kecepatan tertinggi mobil (SP), tenaga kuda mesin mobil (HP), dan berat mobil (WT).

Tabel 1. Hasil Estimasi Parameter Metode GLS

Parameter	*GLS*	
	Estimasi	**Standar Error**
β_0	184.3764	75.63675
β_1	-1.107449	0.809239
β_2	0.295401	0.371766
β_4	-2.052169	0.877662

Adapun hasil OLS, regresi Bootstrap dengan pengambilan sampel sebanyak n dan replikasi B = 1000 dan Jackknife dengan menggunakan program Macro Minitab sebagai berikut :

Tabel 2. Hasil Estimasi Parameter dengan OLS, Regresi Bootstrap dan Jackknife

Parameter	*OLS*		*Bootstrap*		*Jackknife*	
	Estimasi	**Standart Error**	**Estimasi**	**Standart Error**	**Estimasi**	**Standar Error**
β_0	184.699	83.8448	184.489	87.9758	184.799	85.1812
β_1	-1.11026	0.897990	-1.11106	0.942178	-1.11127	0.912296
β_2	0.307384	0.420711	0.314681	0.447012	0.308271	0.427649
β_4	-2.10318	0.996544	-2.12238	1.06151	-2.10618	1.01314

Dari ketiga metode di atas, didapatkan nilai estimasi yang cenderung hampir sama dengan nilai estimasi yang menggunakan metode GLS yang terbukti nilai dari estimasi tersebut bersifat BLUE. Metode OLS yang mengabaikan asumsi heteroskedastisitas ternyata memiliki standart error lebih kecil dibandingkan metode Bootstrap dan Jackknife, sedangkan diantara metode Bootstrap dan Jackknife sendiri. Metode Jackknife merupakan metode yang lebih baik digunakan karena dilihat dari standart errornya, standart errorJackknife lebih kecil dibandingkan dengan metode Bootstrab.

Tabel 3. Bias, Variansi, dan Selang Kepercayaan Estimasi Parameter Regresi Bootstrap dan Jackknife

Me-tode	Para-meter	Estimasi	Bias	Lower bound	Upper bound	Variansi Estimasi Parameter
BOOTSTRAP	β_0	184.489	0.1126	-29.7619	405.533	12259.1
	β_1	-1.11106	-0.003611	-3.52498	1.05615	1.32941
	β_2	0.314681	0.01928	-0.682645	1.42225	0.293645
	β_3	-2.12238	-0.070211	-4.92419	0.438985	1.87129
JACKKNIFE	β_0	184.799	0.4226	103.446	234.882	16727.5
	β_1	-1.11127	-0.003821	-1.66680	-0.527180	1.81146
	β_2	0.308271	0.01287	-0.0622073	0.559521	0.417716
	β_3	-2.10618	-0.054011	-2.99274	-1.46482	2.72560

Dari tabel di atas tampak bahwa nilai bias β_0 dan β_1 lebih besar bias pada regresi Jackknife dibandingkan regresi Bootstrap. Namun pada $\beta_2$dan β_3 nilai bias Jackknife lebih kecil dibandingkan dengan nilai bias Bootstrap. Begitu juga selang kepercayaan pada regresi Jackknife, tampak bahwa nilai estimasi selang kepercayaannya lebih sempit dibandingkan dengan regresi Bootstrap yang itu artinya tingkat akurasi pada regresi Jackknife lebih baik dibandingkan dengan tingkat akurasi pada regresi bootsrap. Jadi, untuk kasus data ini, hasil penelitian menunjukkan bahwa regresi Jackknife merupakan metode yang lebih baik untuk mengestimasi parameter regresi linier berganda khususnya untuk metode yang mengabaikan asumsi distribusi.

SIMPULAN DAN SARAN

Regresi Bootstrap dalam mengestimasi parameter regresi meliputi tahap-tahap membentuk persamaan regresi linear berganda menggunakan metode pairs Bootstrap, mengestimasi persamaan regresi Bootstrap menggunakan metode least square, mengambil sampel random berukuran n sebanyak replikasi B dengan pengembalian, menghitung estimasi parameter setiap sampel Bootstrap, menghitung rata-rata estimasi parameter sampel Bootstrap dan menghitung tingkat akurasi estimasi parameter. Sama halnya dengan metode Jackknife, dalam mengestimasi parameter regresi, meliputi tahap-tahap membentuk persamaan regresi linear berganda menggunakan metode Jackknife, mengestimasi persamaan regresi Jackknife menggunakan metode least square, mengambil sampel random berukuran $n-1$ sebanyak n dengan cara menghapus tiap satu pasangan observasi dengan pengembalian, menghitung estimasi parameter setiap sampel Jackknife, menghitung rata-rata estimasi parameter sampel Jackknife serta menghitung tingkat akurasi estimasi parameter.

Hasil implementasi regresi Bootstrap dan Jackknife ketika mengestimasi parameter regresi pada kasus heteroskedastisitas, didapatkan bahwa nilai standar error tiap beta regresi Jackknife lebih kecil dibandingkan dengan regresi Bootstrap, selain itu selang kepercayaan regresi Jackknife lebih sempit dibandingkan dengan regresi Bootstrap. Adapun nilai estimasi yang mendekati metode GLS adalah nilai estimasi regresi Jackknife, artinya tingkat akurasi dalam mengestimasi parameter regresi pada kasus data ini regresi Jackknife lebih baik dibandingkan dengan regresi Bootstrap. Saran untuk penelitian selanjutnya yaitu membandingkan beberapa metode untuk mengetahui metode yang lebih baik dalam mengidentifikasi struktur dan mengestimasi parameter regresi.

DAFTAR RUJUKAN

Firdaus, M. (2004). *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. PT. Bumi Aksara. Jakarta.

Kariya T. & Hiroshi K. (2004). *Generalized Least Square*. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester.

Koopmans, L.H. (1987). *Introduction to Contemporary Statistical Methods*. 2nd ed. Boston: PWS.

Rini, E. S. (2002). *Estimasi Fungsi Permintan*. Sumatera: Univeritas Sumatera Utara (USU) digital library

Sahinler, S. & Dervis, T. (2007). *Bootstrap and Jackknife Resampling Algorithms for Estimation of Regression Parameters*. Journal of Applied Quantitative Methods. Turkey, Hatay, vol.2 No.2 Summer 2007.

Sembiring, R K. (1995). *Analisis Regresi*. ITB : Bandung.

Sprent, P. (1991). *Metode Statistik Nonparametrik Terapan*. Jakarta : Penerbit Universitas Indonesia.

Syukriyah, A. (2011). *Analisis Uji Heteroskedastisitas pada Regresi Linier Berganda*. Skripsi. Malang : UIN Malang.

Yitnosumarto, S. (1990). *Dasar-Dasar Statistika*. C. V Rajawali : Jakarta.