



Bilangan Kromatik Lokasi Gabungan Graf Palem

(The Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Palm Graphs)

Aisyah Nurinsani¹, Des Welyyanti^{2*}, Lyra Yulianti³

^{1,2,3} Prodi S2 Matematika, FMIPA, Universitas Andalas – Kampus UNAND Limau Manis Padang, Sumatera Barat, Indonesia, 25163

* email penulis korespondensi: wely@sci.unand.ac.id

Abstrak

Pewarnaan titik pada suatu graf adalah pewarnaan titik dengan syarat setiap dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Kode warna suatu titik adalah jarak titik ke partisi himpunan warna yang ada. Suatu graf mempunyai pewarnaan lokasi jika setiap titik tersebut mempunyai kode warna yang berbeda. Graf palem adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran, lintasan, dan bintang. Gabungan graf palem adalah graf tak terhubung dengan graf palem sebagai komponen-komponennya. Bilangan kromatik lokasi adalah banyaknya warna minimum pada graf sedemikian sehingga graf tersebut mempunyai pewarnaan lokasi dengan k warna. Penelitian ini membahas bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem. Hasil dari penelitian ini adalah teorema bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi; graf tak terhubung; gabungan graf palem; kode warna; partisi.

Abstract

Vertex coloring of a graph is the coloring of vertices such that two adjacent vertices have different colors. The color code of a vertex is the distance from the vertex to the partition of the existing color set. A graph has a locating coloring if each vertex has a different color code. A palm graph is a graph constructed from a cycle graph, path graph, and star graph. A disjoint union of palm graphs is a disconnected graph with palm graphs as its components. The locating chromatic number of graph is the minimum colors of the graph to have locating coloring with k colors. In this paper, we determine the locating chromatic number of a disjoint union of palm graph. The result was found theorem of locating chromatic number of disjoint union of palm graph.

Keywords: locating chromatic number; disconnected graph; disjoint union of palm graphs; color code; partition.

Cara mengutip dengan APA 7 style: Nurinsani, A., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2023). Bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9(1), 78-87. <https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v9i1.4828>.

PENDAHULUAN

Salah satu pengembangan dari konsep pewarnaan titik dalam graf adalah bilangan kromatik lokasi suatu graf. Pewarnaan titik pada graf berarti memberikan warna pada setiap titik dalam graf tersebut dengan ketentuan bahwa dua titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G . Pewarnaan titik

pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Misalkan Q_i merupakan himpunan titik yang diberi warna i . Selanjutnya Q_i disebut sebagai kelas warna ke- i , maka $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ adalah himpunan partisi yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k -pasang terurut $(d(v, Q_1), d(v, Q_2), \dots, d(v, Q_k))$ dimana $d(v, Q_i) = \min\{d(u, x) | x \in Q_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Titik $v \in V(G)$ disebut titik dominan jika $d(v, Q_i) = 1$ untuk $v \notin Q_i$ dan 0 untuk yang lainnya. Jika setiap titik di graf G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G dan dinotasikan sebagai $\chi_L(G)$ (Chartrand dkk., 2002).

Bilangan kromatik lokasi pertama kali dikenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002 (Chartrand dkk., 2002). Konsep bilangan kromatik lokasi yang dikenalkan oleh Chartrand dkk. merupakan konsep bilangan kromatik lokasi pada graf terhubung. Chartrand dkk. memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf lingkaran C_n yaitu $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap, serta graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi graf terhubung berlanjut ke tahun 2012 oleh Asmiati dan Baskoro yang mengkarakterisasi graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi 3 (Asmiati & Baskoro, 2012). Penelitian bilangan kromatik lokasi graf terhubung yang lainnya adalah bilangan kromatik lokasi untuk graf *Buckminsterfullerene-type* (Putri dkk., 2021), graf pizza (Surbakti dkk., 2023), graf split lintasan (Rahmatalia dkk., 2022), graf amalgamasi kipas berekor (Welyyanti dkk., 2023), dan graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap (Hartiansyah & Darmaji, 2023).

Konsep bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dikenalkan oleh Welyyanti dkk. tahun 2014 (Welyyanti dkk., 2014). Bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dinotasikan sebagai $\chi'_L(H)$ dimana H adalah graf tak terhubung. Pada graf tak terhubung, bilangan kromatik lokasi dapat bernilai hingga atau tak hingga. Misalkan H adalah graf tak terhubung dan c adalah k -pewarnaan pada graf H . Misalkan $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ adalah partisi dari $V(H)$ yang diinduksi oleh c , dimana Q_i adalah himpunan semua titik di H yang berwarna i . Kode warna dari titik $v \in V(H)$ adalah $(d(v, Q_1), d(v, Q_2), \dots, d(v, Q_k))$ dimana $d(v, Q_i) = \min\{d(u, x) | x \in Q_i\}$ dan $d(v, Q_i) \leq \infty$ untuk $1 \leq i \leq k$. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan lokasi- k jika semua kode warna dari titik-titik pada graf H berbeda. Jika tidak ada nilai k yang memenuhi maka $\chi'_L(H) = \infty$.

Penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung yang dilakukan oleh Welyyanti dkk. adalah bilangan kromatik lokasi untuk graf tak terhubung yang setiap komponennya memuat satu titik dominan (Welyyanti dkk., 2015), graf lintasan dan graf lingkaran sebagai komponennya (Welyyanti dkk., 2019), graf lintasan, graf lingkaran, dan graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya (Welyyanti dkk., 2021), dan graf lintasan dan graf bintang ganda sebagai komponen-komponennya (Welyyanti dkk., 2021). Penelitian lain bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung adalah bilangan kromatik lokasi graf galaksi dan hutan linier (Zahara dkk., 2019), graf tak terhubung dengan graf lingkaran sebagai komponen-komponennya (Anas dkk., 2019), gabungan graf bintang ganda (Asmiati dkk., 2019), graf tak terhubung dengan graf lintasan dan graf roda sebagai komponen-komponennya (Anti dkk., 2021), gabungan graf kipas (Zikra dkk., 2022), dan gabungan graf *Buckminsterfullerene* (Zulkarnain dkk., 2024).

Penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi graf palem dilakukan oleh Taufiqurrahman pada tahun 2022 (Taufiqurrahman, 2022) dimana graf palem merupakan graf terhubung. Definisi graf palem dikemukakan oleh Mujib pada tahun 2019 dan graf palem dinotasikan sebagai $C_k P_l S_m$ dengan $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$ (Mujib, 2019). Gabungan graf palem merupakan graf tak terhubung dengan graf palem sebagai komponen-komponennya, dinotasikan sebagai $t(C_k P_l S_m)$ dengan $t \geq 2, k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Penelitian terdahulu yang disebutkan belum membahas bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem sehingga penelitian mengenai bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem perlu dilanjutkan.

Misalkan G adalah graf terhubung. Batas atas bilangan kromatik lokasi pada G diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan partisi $\Pi = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ untuk beberapa bilangan bulat positif k sedemikian sehingga setiap titik-titik di G mempunyai kode warna yang berbeda-beda, dinotasikan sebagai $\chi_L(G) \leq k$. Batas bawah dari $\chi_L(G)$ diperoleh dengan menunjukkan setiap kemungkinan dari Π' dengan $|\Pi'| < k$ terdapat setidaknya dua titik yang mempunyai kode warna yang sama, dinotasikan sebagai $\chi_L(G) \geq k$. Pembuktian ini juga berlaku untuk graf tak terhubung H . Jika tidak ada k yang memenuhi kondisi diatas, maka $\chi'_L(H) = \infty$.

Welyyanti dkk. (2014) memberikan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung, termuat pada teorema di bawah ini.

Teorema 1 (Welyyanti dkk, 2014) Untuk setiap i , misalkan G_i adalah graf terhubung dan misalkan $H = \cup_{i=1}^m G_i$. Jika $\chi'_L(H) \leq \infty$, maka $q \leq \chi'_L(H) \leq r$ dimana $q = \max\{\chi_L(G_i) : i \in [1, m]\}$ dan $r = \min\{|V(G_i)| : i \in [1, m]\}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1 (Mujib, 2019) Graf palem didefinisikan sebagai graf yang dibangun dari tiga graf, yaitu graf lingkaran C_k , graf lintasan P_l , dan graf bintang S_m untuk $k \geq 3, l \geq 2$, dan $m \geq 2$ dengan himpunan titik-titik dan sisi-sisi masing-masing graf lingkaran C_k , graf lintasan P_l , dan graf bintang S_m sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(C_k) &= \{u_c \mid 1 \leq c \leq k\} \\ E(C_k) &= \{u_c u_{c+1} \mid 1 \leq c \leq k\} \cup \{u_k u_1\} \\ V(P_l) &= \{w_b \mid 1 \leq b \leq l\} \\ E(P_l) &= \{w_b w_{b+1} \mid 1 \leq b \leq l-1\} \\ V(S_m) &= \{v_a \mid 0 \leq a \leq m\} \\ E(S_m) &= \{v_0 v_a \mid 1 \leq a \leq m\} \end{aligned}$$

Ketiga graf tersebut dihubungkan sedemikian sehingga akan membentuk graf palem, dimana titik u_1 dan w_l dihubungkan dengan suatu sisi e_1 , dan titik w_1 dan v_0 dihubungkan dengan suatu sisi e_2 dengan himpunan titik-titik dan sisi-sisi sebagai berikut. Konstruksi graf palem dapat dilihat pada Gambar 1.

$$\begin{aligned} V(C_k P_l S_m) &= \{v_a \mid 0 \leq a \leq m\} \cup \{w_b \mid 1 \leq b \leq l\} \cup \{u_c \mid 1 \leq c \leq k\} \\ E(C_k P_l S_m) &= \{v_0 v_a \mid 1 \leq a \leq m\} \cup \{v_0 w_1\} \cup \{w_b w_{b+1} \mid 1 \leq b \leq l-1\} \cup \{w_l u_1\} \\ &\quad \cup \{u_c u_{c+1} \mid 1 \leq c \leq k\} \cup \{u_k u_1\} \end{aligned}$$



Gambar 1. Graf Palem

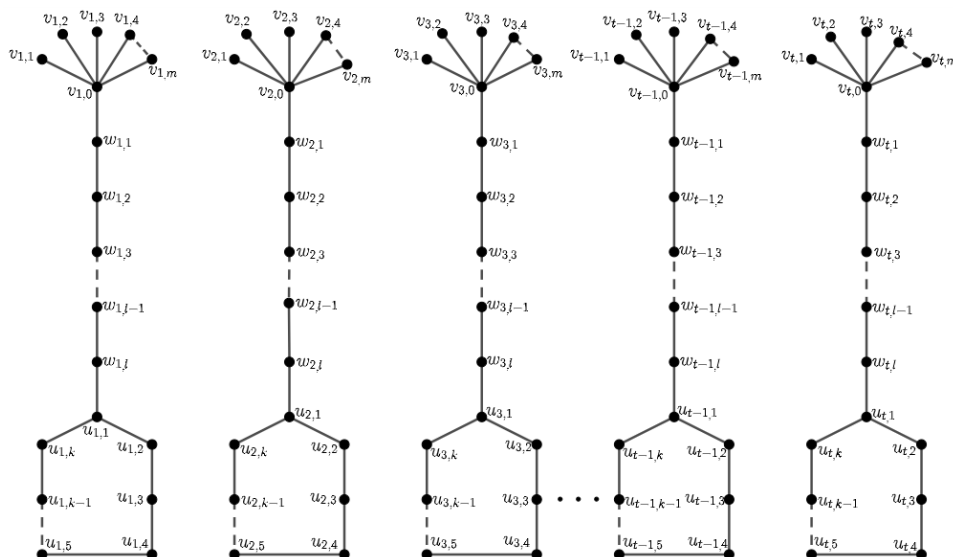
Berikut ini adalah teorema yang memberikan bilangan kromatik lokasi graf palem $C_k P_l S_m$ dengan $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Teorema 2 (Taufiqurrahman, 2022) Jika $G = C_k P_l S_m$ adalah graf palem dengan $k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$, maka

$$\chi_L(G) = \begin{cases} 4, & m = 2 \\ m + 1, & m \geq 3 \end{cases}$$

Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari gabungan graf palem $H = t(C_k P_l S_m)$ dimana $t \geq 2, k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$. Gambar 2 merupakan gambar gabungan graf palem $H = t(C_k P_l S_m)$, dengan gabungan graf palem yang merupakan graf tak terhubung dengan graf palem sebagai komponen-komponennya, dengan himpunan titik-titik dan sisi-sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(t(C_k P_l S_m)) &= \bigcup_{r=1}^t \{v_{r,a} \mid 0 \leq a \leq m\} \\ &\cup \bigcup_{r=1}^t \{w_{r,b} \mid 1 \leq b \leq l\} \cup \bigcup_{r=1}^t \{u_{r,c} \mid 1 \leq c \leq k\} \\ E(t(C_k P_l S_m)) &= \bigcup_{r=1}^t \{v_{r,0} v_{r,a} \mid 1 \leq a \leq m\} \cup \bigcup_{r=1}^t \{v_{r,0} w_{r,1}\} \\ &\cup \bigcup_{r=1}^t \{w_{r,b} w_{r,b+1} \mid 1 \leq b \leq l-1\} \cup \bigcup_{r=1}^t \{w_{r,l} u_{r,1}\} \\ &\cup \bigcup_{r=1}^t \{u_{r,c} u_{r,c+1} \mid 1 \leq c \leq k\} \cup \bigcup_{r=1}^t \{u_{r,k} u_{r,1}\} \end{aligned}$$



Gambar 2. Gabungan Graf Palem

Bilangan Kromatik Lokasi Gabungan Graf Palem ($H = t(C_k P_l S_m)$)

Pada Teorema 3 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem yang dinotasikan sebagai $H = t(C_k P_l S_m)$ dimana $t \geq 2, k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Teorema 3. Misalkan terdapat graf $H = t(C_k P_l S_m)$ dimana $t \geq 2, k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$ maka

$$\chi'_L(H) = \begin{cases} 4, & 2 \leq t \leq 8, \quad m = 2 \\ m + 1, & 2 \leq t \leq m + 1, \quad m \geq 3 \end{cases}$$

Bukti : Pembuktian teorema tersebut dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

Kasus 1. Untuk $m = 2$ dan $2 \leq t \leq 8$

Misalkan terdapat graf $H = t(C_k P_l S_m)$ dengan $m = 2$ dan $2 \leq t \leq 8$. Dengan menggunakan Teorema 2, Maka, $\chi'_L(H) \geq 4$. Untuk menentukan $\chi'_L(H) \leq 4$, perhatikan subkasus-subkasus berikut.

Kasus 1.1. Untuk k ganjil.

Kasus 1.1.1. Untuk l ganjil.

Definisikan suatu pewarnaan $c_1 : V(H_1) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ untuk $0 \leq a \leq m, 1 \leq c \leq k, 1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $2 \leq t \leq 8$ dimana k ganjil sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} c_1(v_{r,a}) &= (r + a) \bmod 4, \\ c_1(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 1) \bmod 4, & b \text{ ganjil,} \\ r \bmod 4, & b \text{ genap,} \end{cases} \\ c_1(u_{r,c}) &= \begin{cases} r \bmod 4, & c = 1, \\ (r + 1) \bmod 4, & c \text{ genap,} \\ (r + 3) \bmod 4, & c \text{ selainnya,} \end{cases} \end{aligned}$$

untuk $1 \leq t \leq 4$. Untuk $5 \leq t \leq 8$ didefinisikan pewarnaan titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_1(v_{r,a}) &= (r - a) \bmod 4, \\ c_1(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 2) \bmod 4, & b \text{ ganjil,} \\ r \bmod 4, & b \text{ genap,} \end{cases} \\ c_1(u_{r,c}) &= \begin{cases} r \bmod 4, & c = 1, \\ (r + 1) \bmod 4, & c \text{ genap,} \\ (r + 3) \bmod 4, & c \text{ selainnya.} \end{cases} \end{aligned}$$

Misalkan $\Pi_1 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ berdasarkan pewarnaan c_1 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_1 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq 4$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_1 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq 4$ dengan k ganjil dan l ganjil.

Kasus 1.1.2. Untuk l genap

Definisikan suatu pewarnaan $c_2 : V(H_2) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ untuk $0 \leq a \leq m, 1 \leq c \leq k, 1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $2 \leq t \leq 8$ dimana k ganjil sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} c_2(v_{r,a}) &= (r + a) \bmod 4, \\ c_2(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 1) \bmod 4, & b \text{ ganjil,} \\ r \bmod 4, & b \text{ genap,} \end{cases} \\ c_2(u_{r,c}) &= \begin{cases} (r + 1) \bmod 4, & c = 1, \\ r \bmod 4, & c \text{ genap,} \\ (r + 3) \bmod 4, & c \text{ selainnya.} \end{cases} \end{aligned}$$

untuk $1 \leq t \leq 4$. Untuk $5 \leq t \leq 8$ didefinisikan pewarnaan titik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_2(v_{r,a}) &= \begin{cases} (r + a) \bmod 4, & a \in \{0,1\}, \\ (r + 3) \bmod 4, & a = 2, \end{cases} \\ c_2(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 3) \bmod 4, & b \text{ ganjil,} \\ r \bmod 4, & b \text{ genap,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$c_2(u_{r,c}) = \begin{cases} (r+3) \bmod 4, & c = 1, \\ (r+2) \bmod 4, & c \text{ genap}, \\ (r+1) \bmod 4, & c \text{ selainnya.} \end{cases}$$

Misalkan $\Pi_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ berdasarkan pewarnaan c_2 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_2 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq 4$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_2 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq 4$ dengan k ganjil dan l genap.

Kasus 1.2. Untuk k genap

Cara Pembuktian batas bawah untuk k genap serupa dengan kasus k ganjil. Diperoleh bahwa $\chi'_L(H) \geq 4$.

Kasus 1.2.1. Untuk l ganjil

Definisikan suatu pewarnaan $c_3 : V(H_3) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ untuk $0 \leq a \leq m$, $1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $2 \leq t \leq 8$ dimana k genap sedemikian sehingga:

$$c_3(v_{r,a}) = (r+a) \bmod 4,$$

$$c_3(w_{r,b}) = \begin{cases} (r+1) \bmod 4, & b \text{ ganjil}, \\ r \bmod 4, & b \text{ genap}, \end{cases}$$

$$c_3(u_{r,c}) = \begin{cases} r \bmod 4, & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ (r+1) \bmod 4, & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ (r+3) \bmod 4, & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases}$$

untuk $1 \leq t \leq 4$. Untuk $5 \leq t \leq 8$ didefinisikan pewarnaan titik sebagai berikut:

$$c_3(v_{r,a}) = (r-a) \bmod 4,$$

$$c_3(w_{r,b}) = \begin{cases} (r+2) \bmod 4, & b \text{ ganjil}, \\ r \bmod 4, & b \text{ genap}, \end{cases}$$

$$c_3(u_{r,c}) = \begin{cases} r \bmod 4, & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ (r+1) \bmod 4, & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ (r+3) \bmod 4, & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases}$$

Misalkan $\Pi_3 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ berdasarkan pewarnaan c_3 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_3 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq 4$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_3 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq 4$ dengan k genap dan l ganjil.

Kasus 1.2.2. Untuk l genap

Definisikan suatu pewarnaan $c_4 : V(H_4) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ untuk $0 \leq a \leq m$, $1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $2 \leq t \leq 8$ dimana k genap sedemikian sehingga:

$$c_4(v_{r,a}) = (r+a) \bmod 4,$$

$$c_4(w_{r,b}) = \begin{cases} (r+1) \bmod 4, & b \text{ ganjil}, \\ r \bmod 4, & b \text{ genap}, \end{cases}$$

$$c_4(u_{r,c}) = \begin{cases} (r+1) \bmod 4, & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ r \bmod 4, & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ (r+3) \bmod 4, & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases}$$

untuk $1 \leq t \leq 4$. Untuk $5 \leq t \leq 8$ didefinisikan pewarnaan titik sebagai berikut:

$$c_4(v_{r,a}) = \begin{cases} (r+a) \bmod 4, & a \in \{0,1\}, \\ (r+3) \bmod 4, & a = 2, \end{cases}$$

$$c_4(w_{r,b}) = \begin{cases} (r+3) \bmod 4, & b \text{ ganjil}, \\ r \bmod 4, & b \text{ genap}, \end{cases}$$

$$c_4(u_{r,c}) = \begin{cases} (r+3) \bmod 4, & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ (r+2) \bmod 4, & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ (r+1) \bmod 4, & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau } c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases}$$

Misalkan $\Pi_4 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ berdasarkan pewarnaan c_4 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_4 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq 4$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_4 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq 4$ dengan k genap dan l ganjil.

Kasus 2. Untuk $m \geq 3$ dan $2 \leq t \leq m+1$

Misalkan terdapat graf $H = t(C_k P_l S_m)$. Dengan menggunakan Teorema 2, Maka, $\chi'_L(H) \geq m+1$. Untuk menentukan $\chi'_L(H) \leq m+1$, perhatikan subkasus-subkasus sebagai berikut.

Kasus 2.1. Untuk k ganjil

Kasus 2.1.1. Untuk l ganjil

Definisikan suatu pewarnaan $c_5 : V(H_5) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$ untuk $0 \leq a \leq m$, $1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $t \leq m+1$ dimana k ganjil sedemikian sehingga:

$$c_5(v_{r,a}) = (r+a) \bmod (m+1),$$

$$c_5(w_{r,b}) = \begin{cases} (r+3) \bmod (m+1), & b \text{ ganjil}, \\ (r+1) \bmod (m+1), & b \text{ genap}, \end{cases}$$

$$c_5(u_{r,c}) = \begin{cases} (r+1) \bmod (m+1), & c = 1, \\ r \bmod (m+1), & c \text{ genap}, \\ (r+3) \bmod (m+1), & c \text{ selainnya}. \end{cases}$$

Misalkan $\Pi_5 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}\}$ berdasarkan pewarnaan c_5 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_5 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq m+1$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_5 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq m+1$ dengan k ganjil dan l ganjil.

Kasus 2.1.2. Untuk l genap

Definisikan suatu pewarnaan $c_6 : V(H_6) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$ untuk $0 \leq a \leq m$,

$1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $t \leq m + 1$ dimana k ganjil sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} c_6(v_{r,a}) &= (r + a) \bmod (m + 1), \\ c_6(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 3) \bmod (m + 1), & b \text{ ganjil,} \\ (r + 1) \bmod (m + 1), & b \text{ genap,} \end{cases} \\ c_6(u_{r,c}) &= \begin{cases} (r + 3) \bmod (m + 1), & c = 1, \\ (r + 1) \bmod (m + 1), & c \text{ genap,} \\ r \bmod (m + 1), & c \text{ selainnya.} \end{cases} \end{aligned}$$

Misalkan $\Pi_6 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}\}$ berdasarkan pewarnaan c_6 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_6 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq m + 1$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_6 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq m + 1$ dengan k ganjil dan l genap.

Kasus 2.2. Untuk k genap

Kasus 2.2.1. Untuk l ganjil

Definisikan suatu pewarnaan $c_7 : V(H_7) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ untuk $0 \leq a \leq m$, $1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $t \leq m + 1$ dimana k genap sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} c_7(v_{r,a}) &= (r + a) \bmod (m + 1), \\ c_7(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 3) \bmod (m + 1), & b \text{ ganjil,} \\ (r + 1) \bmod (m + 1), & b \text{ genap,} \end{cases} \\ c_7(u_{r,c}) &= \begin{cases} (r + 1) \bmod (m + 1), & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ r \bmod (m + 1), & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau} \\ & c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ (r + 3) \bmod (m + 1), & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau} \\ & c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Misalkan $\Pi_7 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}\}$ berdasarkan pewarnaan c_7 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_7 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq m + 1$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_7 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq m + 1$ dengan k genap dan l ganjil.

Kasus 2.2.2. Untuk l genap

Definisikan suatu pewarnaan $c_8 : V(H_8) \rightarrow \{1, 2, \dots, m + 1\}$ untuk $0 \leq a \leq m$, $1 \leq c \leq k$, $1 \leq b \leq l$, dan $1 \leq r \leq t$ dengan $t \leq m + 1$ dimana k genap sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} c_8(v_{r,a}) &= (r + a) \bmod (m + 1), \\ c_8(w_{r,b}) &= \begin{cases} (r + 3) \bmod (m + 1), & b \text{ ganjil,} \\ (r + 1) \bmod (m + 1), & b \text{ genap,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$c_8(u_{r,c}) = \begin{cases} (r+3) \bmod (m+1), & c \in \left\{1, \frac{k}{2} + 1\right\}, \\ (r+1) \bmod (m+1), & c \text{ genap dan } c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau} \\ & c \text{ ganjil dan } c > \frac{k}{2} + 1, \\ r \bmod (m+1), & c \text{ ganjil dan } 1 < c < \frac{k}{2} + 1 \text{ atau} \\ & c \text{ genap dan } c > \frac{k}{2} + 1. \end{cases}$$

Misalkan $\Pi_8 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}\}$ berdasarkan pewarnaan c_8 adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf H_8 dengan Q_i merupakan kelas warna ke- i dengan $1 \leq t \leq m+1$.

Setiap kode warna titik-titik $u_{r,c}$ dan $w_{r,b}$ pada graf H_8 dibedakan oleh jarak ke titik $u_{r,1}$ sehingga kode warna yang diperoleh berbeda. Karena $d(v_{r,a}, u_{r,1}) = d(v_{r,a}, w_{r,b}) + d(w_{r,b}, u_{r,1})$, maka kode warna titik-titik $v_{r,a}$ berbeda-beda. Jadi $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) \leq m+1$ dengan k genap dan l genap.

Berdasarkan uraian di atas, terbukti bahwa $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) = 4$ untuk $m = 2$ dan $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) = m+1$ untuk $m \geq 3$ dengan $t \geq 2, k \geq 3, l \geq 2$ dan $m \geq 2$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada penelitian ini telah diperoleh bilangan kromatik lokasi gabungan graf palem $H = t(C_k P_l S_m), \chi'_L(t(C_k P_l S_m)) = 4$ untuk $m = 2$ dan $2 \leq t \leq 8$ serta $\chi'_L(t(C_k P_l S_m)) = m+1$ untuk $m \geq 3$ dan $2 \leq t \leq m+1$. Peneliti berikutnya disarankan untuk mengkaji bilangan kromatik lokasi graf tersebut untuk kemungkinan nilai m dan t lainnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini dibiayai oleh Penelitian Tesis Magister DRPM Tahun 2024, 041/ES/PG.02.00.PL/2024 dan 242/UN16.19/PT.01.03/PL/2024.

DAFTAR RUJUKAN

- Anas, F. R., Welyyanti, D., & Effendi, E. (2019). Bilangan kromatik lokasi graf tak terhubung dengan graf lingkaran sebagai komponen-komponennya. *Jurnal Matematika UNAND*, 8(2), 33–36. <https://doi.org/10.25077/jmu.8.2.33-36.2019>
- Anti, A., Welyyanti, D., & Azhari, M. (2021). On locating chromatic number of $P = P_m \cup W_n$. *Journal of Physics: Conference Series*, 1742(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1742/1/012024>
- Asmiati, & Baskoro, E. T. (2012). Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3. *AIP Conference Proceedings*, 1450(3), 351–357. <https://doi.org/10.1063/1.4724167>
- Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristoteles, & Junaidi, A. (2019). The locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. *Journal of Physics: Conference Series*, 1338(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1338/1/012035>
- Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., & Zhang, P. (2002). *The locating-chromatic number of a graph* (pp. 89–101).
- Hartiansyah, F. R., & Darmaji. (2023). Bilangan kromatik lokasi pada graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dan graf lengkap. *Zeta - Math Journal*, 8(2), 66–70. <https://doi.org/10.31102/zeta.2023.8.2.66-70>
- Mujib, A. (2019). Bilangan kromatik permainan graf pot bunga $(C_m S_n)$ dan graf pohon

- palem ($C_k P_1 S_m$). *TEOREMA: Teori Dan Riset Matematika*, 4(1), 13–22. <https://doi.org/10.25157/teorema.v4i1.1903>
- Putri, Y. S., Yulianti, L., & Yanita. (2021). On the locating chromatic number of some Buckminsterfullerene-type graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1836. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012005>
- Rahmatalia, S., Asmiati, & Notiragayu. (2022). Bilangan kromatik lokasi graf split lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*, 18(1), 73–80. <https://doi.org/10.24198/jmi.v18.n1.36091.73-80>
- Surbakti, N. M., Kartika, D., Nasution, H., & Dewi, S. (2023). The locating chromatic number for pizza graphs. *Sainmatika: Jurnal Ilmiah Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 20(2), 126–131. <https://doi.org/10.31851/sainmatika.v20i2.13085>
- Taufiqurrahman, I. (2022). *Bilangan kromatik lokasi graf pohon palem* (Skripsi, Universitas Andalas).
- Welyyanti, D., Andriani, N., & Yulianti, L. (2023). Bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 20(1), 81–95. <http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.12948>
- Welyyanti, D., Azhari, M., & Lestari, R. (2021). On locating chromatic number of disconnected graph. *Journal of Physics: Conference Series*, 1940(1), 012019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1940/1/012019>
- Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., & Uttunggadewa, S. (2014). The locating-chromatic number of disconnected graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 94(2), 169–182.
- Welyyanti, D., Baskoro, E. T., Simanjuntak, R., & Uttunggadewa, S. (2015). On locating-chromatic number for graphs with dominant vertices. *Procedia Computer Science*, 74(2015), 89–92. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.081>
- Welyyanti, D., Lestari, R., & Rahma Putri, S. (2019). The locating chromatic number of disconnected graph with path and cycle graph as its components. *Journal of Physics: Conference Series*, 1317(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1317/1/012021>
- Welyyanti, D., Putri, S. R., Azhari, M., & Lestari, R. (2021). On locating chromatic number of disconnected graph with path, cycle, stars or double stars as its components. *Journal of Physics: Conference Series*, 1742(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1742/1/012020>
- Zahara, Z., Welyyanti, D., & Efendi, E. (2019). Bilangan kromatik lokasi untuk galaksi dan hutan linier. *Jurnal Matematika UNAND*, 7(4), 87–92. <https://doi.org/10.25077/jmu.7.4.87-92.2018>
- Zikra, F., Welyyanti, D., & Yulianti, L. (2022). Bilangan kromatik lokasi gabungan dua graf kipas f_n untuk beberapa n , $n \geq 3$. *Jurnal Matematika Unand*, 11(3), 159–170. <https://doi.org/10.25077/jmua.11.3.159-170.2022>
- Zulkarnain, D., Yulianti, L., Welyyanti, D., Mardimar, K. K., & Fajri, M. R. (2024). On the locating chromatic number of disjoint union of buckminsterfullerene graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 18(2), 915–922. <https://doi.org/10.30598/barekengvol18iss2pp0915-0922>