
**TEKNIK PENALTI PADA OPTIMISASI BERKENDALA
MENGUNAKAN PARTICLE SWARM OPTIMIZATION**
(*PENALTY TECHNIQUE ON CONSTRAINED OPTIMIZATION USING
PARTICLE SWARM OPTIMIZATION*)

Dinita Rahmalia

Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, dinitarahmalia@gmail.com

Abstrak

Optimisasi berkendala adalah proses pencarian nilai optimum dengan memenuhi berbagai kendala. Optimisasi berkendala dapat diselesaikan dengan metode eksak maupun heuristik. Dalam penelitian ini, akan digunakan metode heuristik seperti Particle Swarm Optimization (PSO). PSO adalah metode optimisasi yang terinspirasi dari perilaku populasi ikan atau unggas dalam mencari sumber makanan. PSO dapat digunakan pada optimisasi dengan kendala. Namun dalam update posisi partikel, supaya optimisasi memenuhi kendala, partikel akan dikenakan nilai penalti jika tidak memenuhi kendala. Simulasi diberikan pada dua model optimisasi. Hasil simulasi menunjukkan teknik penalti dapat menemukan pendekatan solusi optimal pada optimisasi berkendala.

Kata kunci: Teknik Penalti, Optimisasi Berkendala, Particle Swarm Optimization

Abstract

Constrained optimization is searching optimal solution by satisfying any constraints. Constrained optimization can be solved by exact method or heuristic method. In this research, we will apply heuristic method like Particle Swarm Optimization (PSO). PSO is optimization method inspired from the flock of fish or bird in searching food source. PSO can be applied on constrained optimization. In update particle position, in order that satisfying constraints, particle will be given penalty if the constraint isn't satisfied. Simulations are applied on two optimization models. The simulations show that penalty technique can find the approaching optimal solution in constrained optimization.

Keywords: *Penalty Technique, Constrained Optimization, Particle Swarm Optimization*

PENDAHULUAN

Masalah optimisasi telah memegang peranan yang penting dalam berbagai permasalahan kehidupan sehari-hari, seperti masalah minimalisasi biaya (Rahmalia, 2018), minimalisasi error (Rahmalia dan Herlambang, 2017) dan sebagainya. Masalah optimisasi tidak berkendala maupun berkendala telah diselesaikan menggunakan metode eksak (Taha, 2007; Hillier dan Lieberman, 2001) maupun metode heuristik (Rao, 2009). Metode eksak dapat menyelesaikan masalah optimisasi secara analitik beserta dengan bukti matematika. Metode

heuristik menggunakan bilangan acak dalam pendekatan solusi optimal. Pada penelitian ini, akan digunakan metode heuristik yaitu Particle Swarm Optimization (PSO) pada masalah optimisasi berkendala menggunakan teknik penalti.

Particle Swarm Optimization (PSO) ditemukan oleh Kennedy dan Eberhart pada tahun 1995. PSO adalah metode optimisasi yang terinspirasi dari perilaku populasi ikan atau unggas dalam mencari sumber makanan dimana suatu individu disebut partikel dan populasi disebut swarm (Kennedy dan Eberhart, 1995).

PSO diinisialisasi dengan sekumpulan partikel sebagai kandidat solusi pada posisi acak. Setiap partikel diberikan posisi awal dan kecepatan awal. Ketika suatu partikel menemukan arah sumber makanan, partikel lainnya akan mengikuti menuju sumber makanan. Salah satu aplikasi PSO adalah untuk menemukan pendekatan solusi optimal pada masalah optimisasi dengan tidak berkendala maupun dengan kendala (Rahmalia, 2017).

PSO dapat digunakan pada optimisasi dengan kendala. Namun dalam update posisi partikel, supaya optimisasi memenuhi kendala, partikel akan dikenakan nilai penalti jika tidak memenuhi kendala. Simulasi diberikan pada dua model optimisasi. Hasil simulasi menunjukkan teknik penalti dapat menemukan pendekatan solusi optimal pada optimisasi berkendala.

METODE PENELITIAN

Metode Barrier dan Penalti

Misalkan terdapat masalah optimisasi (minimisasi) dengan kendala berbentuk pertidaksamaan, dengan $f(x)$ adalah fungsi objective dan $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ adalah kendala, seperti pada persamaan (1)

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{dengan kendala} \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

Masalah optimisasi ini diubah menjadi optimisasi tak berkendala seperti pada persamaan (2) dengan parameter ρ yang bernilai positif dan nilai penalti $p(x)$ (Griva dan Nash, 2009):

$$\begin{aligned} & \min \pi_\rho \\ & \pi_\rho(x) = f(x) + \rho p(x) \end{aligned} \tag{2}$$

Metode barrier dan penalti pada masalah optimisasi berkendala adalah :

1. Pada metode barrier, nilai barrier $p(x)$ mendekat dari dalam daerah penyelesaian (feasible) dan konvergen ke solusi pada masalah optimisasi (Rao, 2009).

Secara umum, fungsi penalti yang digunakan seperti pada persamaan (3)

$$p(x) = -\sum_{i=1}^m \log(g_i(x)) \tag{3}$$

atau

$$p(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$$

2. Pada metode penalti, nilai penalti $p(x)$ mendekat dari luar daerah penyelesaian (infeasible) dan konvergen ke solusi pada masalah optimisasi. Penalti diberikan jika kendala tidak dipenuhi (Rao, 2009).

Secara umum, fungsi penalti yang digunakan seperti pada persamaan (4) karena kendala (1) bernilai positif

$$p(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \min(0, g_i(x))^2 \quad (4)$$

Teknik Penalti pada Masalah Optimisasi dengan Kendala

Teknik penalti mengubah masalah optimisasi dengan kendala menjadi masalah optimisasi tak berkendala dengan memberikan penalti pada infeasible solution. Secara umum, terdapat dua cara memberikan nilai fungsi dengan nilai penalti (Gen dan Cheng, 1997).

Cara 1 :

$$eval(x) = f(x) + \rho p(x) \quad (5)$$

Dimana x adalah suatu variabel, $f(x)$ adalah fungsi objective, parameter penalti ρ dan $p(x)$ adalah nilai penalti.

Pada masalah maksimisasi, pemberian nilai penalti adalah :

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \text{ jika } x \text{ feasible} \\ p(x) &< 0 \text{ jika } x \text{ infeasible} \end{aligned} \quad (6)$$

Pada masalah minimisasi, pemberian nilai penalti adalah :

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \text{ jika } x \text{ feasible} \\ p(x) &> 0 \text{ jika } x \text{ infeasible} \end{aligned} \quad (7)$$

Cara 2 :

$$eval(x) = f(x)p(x) \quad (8)$$

Dimana x adalah suatu variabel, $f(x)$ adalah fungsi objective dan $p(x)$ adalah nilai penalti.

Pada masalah maksimisasi, pemberian nilai penalti adalah :

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \text{ jika } x \text{ feasible} \\ 0 \leq p(x) &< 1 \text{ jika } x \text{ infeasible} \end{aligned} \quad (9)$$

Pada masalah minimisasi, pemberian nilai penalti adalah :

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \text{ jika } x \text{ feasible} \\ p(x) &> 1 \text{ jika } x \text{ infeasible} \end{aligned} \quad (10)$$

Misalkan terdapat masalah optimisasi (minimisasi) dengan kendala berbentuk persamaan :

$$\min f(x) \quad (11)$$

dengan kendala

$$g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Nilai penalti untuk kendala yang tak dipenuhi adalah :

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \quad \text{jika } x \text{ feasible} \\ p(x) &> 0 \quad \text{jika } x \text{ infeasible} \end{aligned} \quad (12)$$

Secara umum, fungsi penalti yang digunakan adalah seperti pada persamaan (13) karena kendala (11) berbentuk persamaan

$$p(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$$

atau

$$p(x) = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^m |g_i(x)|^\gamma \quad (13)$$

dengan $\gamma \geq 1$

Fungsi objective (11) yang telah diberikan penalti $p(x)$ dengan parameter penalti ρ yang bernilai positif seperti pada persamaan (14)

$$\begin{aligned} \min \pi_\rho \\ \pi_\rho(x) = f(x) + \rho p(x) \end{aligned} \quad (14)$$

Particle Swarm Optimization

Particle Swarm Optimization (PSO) ditemukan oleh Kennedy dan Eberhart pada tahun 1995. PSO adalah metode optimisasi yang terinspirasi dari perilaku populasi ikan atau unggas dalam mencari sumber makanan dimana suatu individu disebut partikel dan populasi disebut swarm (Kennedy dan Eberhart, 1995).

PSO diinisialisasi dengan sekumpulan partikel sebagai kandidat solusi pada posisi acak. Setiap partikel diberikan posisi awal dan kecepatan awal. Ketika suatu partikel menemukan arah sumber makanan, partikel lainnya akan mengikuti menuju sumber makanan. Salah satu aplikasi PSO adalah untuk menemukan pendekatan solusi optimal pada masalah optimisasi dengan tidak berkendala maupun dengan kendala (Rahmalia, 2017).

Langkah-langkah algoritma PSO adalah sebagai berikut :

1. Inisialisasi posisi partikel $X^s(0)$, $s = 1, 2, \dots, \max_swarm$
2. Inisialisasi kecepatan partikel $V^s(0)$, $s = 1, 2, \dots, \max_swarm$
3. Tentukan local best particle

$$Pbest^s = X^s(0), \quad s = 1, 2, \dots, \max_swarm \quad (15)$$

4. Hitung fitness function $f(Pbest^s)$, $s = 1, 2, \dots, \max_swarm$ beserta nilai penalti $p(X^s(0))$
5. Tentukan global best particle

$$Gbest = \arg \min_{Pbest} (f(Pbest^s), s = 1, 2, \dots, \max_swarm) \quad (16)$$

6. Update posisi dan kecepatan partikel

for $t = 0 : \max_t - 1$

for $s = 1 : \max_swarm$

a. Hitung kecepatan partikel

$$V^s(t+1) = \omega V^s(t) + c_1 r_1 (Pbest^s - X^s(t)) + c_2 r_2 (Gbest - X^s(t)) \quad (17)$$

Dengan nilai ω adalah inersia yang bernilai antara 0.9-1.2, nilai $c_1 = c_2 = 2$, sedangkan nilai r_1 dan r_2 adalah bilangan acak antara (0,1).

b. Update posisi partikel

$$X^s(t+1) = X^s(t) + V^s(t+1) \quad (18)$$

c. Hitung fitness function posisi partikel $f(X^s(t+1))$ beserta nilai penalti $p(X^s(t+1))$

d. Tentukan local best particle

$$Pbest^s = \arg \min_x (f(X^s(0)), f(X^s(1)), \dots, f(X^s(t+1))) \quad (19)$$

end

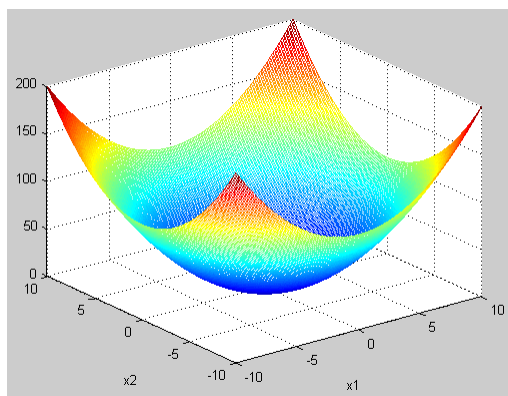
e. Tentukan global best particle

$$Gbest = \arg \min_{Pbest} (f(Pbest^s), s = 1, 2, \dots, \max_swarm) \quad (20)$$

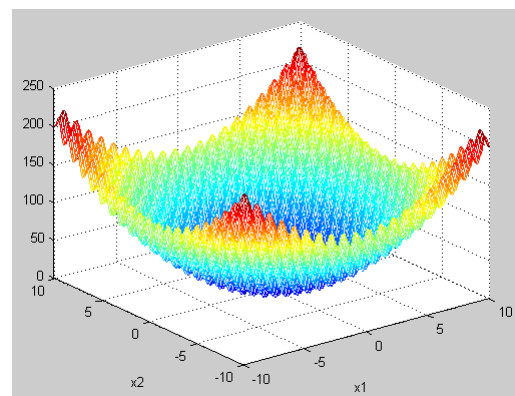
end

HASIL SIMULASI

Pada penelitian ini, terdapat dua model optimisasi berkendala yang akan digunakan seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1, dimana pada model 1, terdapat satu titik optimum global seperti pada Gambar 1 sedangkan pada model 2, terdapat banyak titik optimum lokal seperti pada Gambar 2. Selain itu, juga terdapat tiga fungsi kendala dalam pencarian solusi optimal.



Gambar 1. Fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



Gambar 2. Fungsi $f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2))$

Tabel 1. Model Optimisasi yang Digunakan

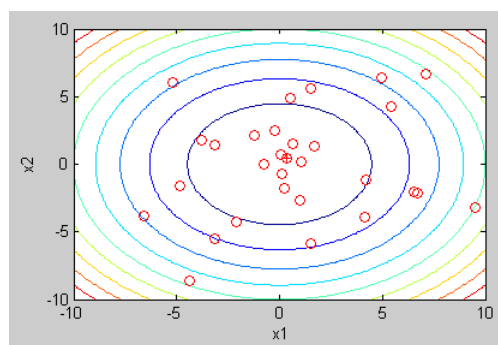
Model	Fungsi
1 dengan kendala	$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1 \geq 3$ $x_2 \geq 0$
2 dengan kendala	$\min f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2))$ $x_1 - x_2 \geq 0$ $x_1 \geq 3$ $x_2 \geq 0$

Teknik penalti yang digunakan pada model 1 dan model 2 menggunakan PSO. Pada bagian update partikel PSO, perhitungan nilai fitness akan dikenakan penalti jika partikel tidak memenuhi kendala. Parameter PSO yang digunakan adalah :

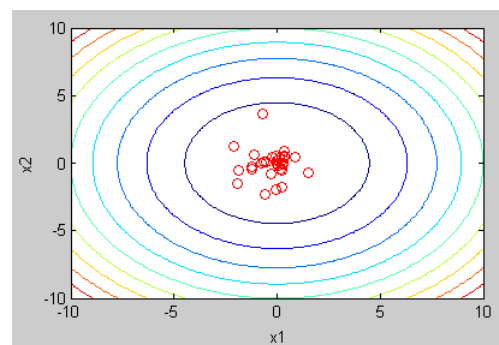
Jumlah populasi : 30

Iterasi maksimum : 50

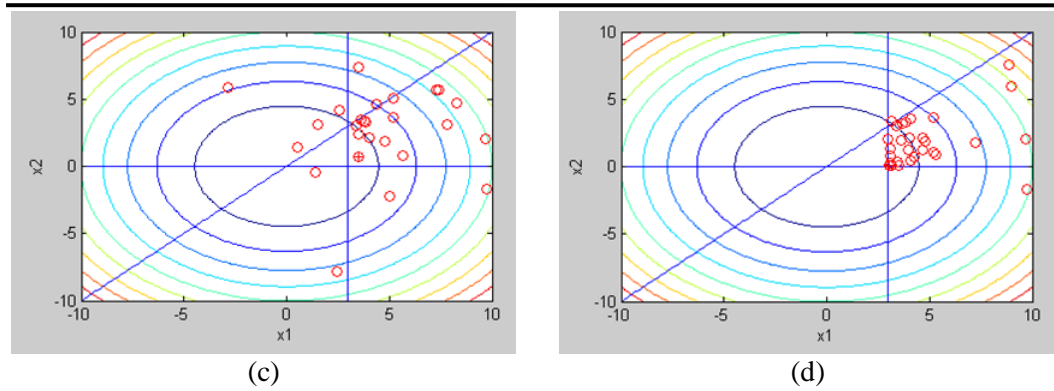
Hasil simulasi pada model 1 dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4. Pada Gambar 3(a)-(b) terlihat proses optimisasi tanpa kendala dari iterasi pertama sampai iterasi maksimum. Pada Gambar 3(c)-(d) terlihat proses optimisasi dengan kendala dari iterasi pertama sampai iterasi maksimum. Pada iterasi pertama, partikel memilih posisi secara random. Pada proses optimisasi, berdasarkan proses update partikel, partikel bergerak mendekati solusi optimum yang dipengaruhi oleh nilai penalti jika partikel tidak memenuhi kendala. Gambar 4 memperlihatkan nilai fitness dari global best particle sebagai solusi optimal yang menurun dari iterasi awal sampai iterasi maksimum pada optimisasi berkendala.



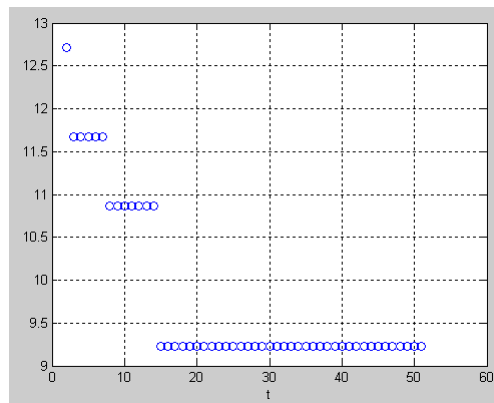
(a)



(b)



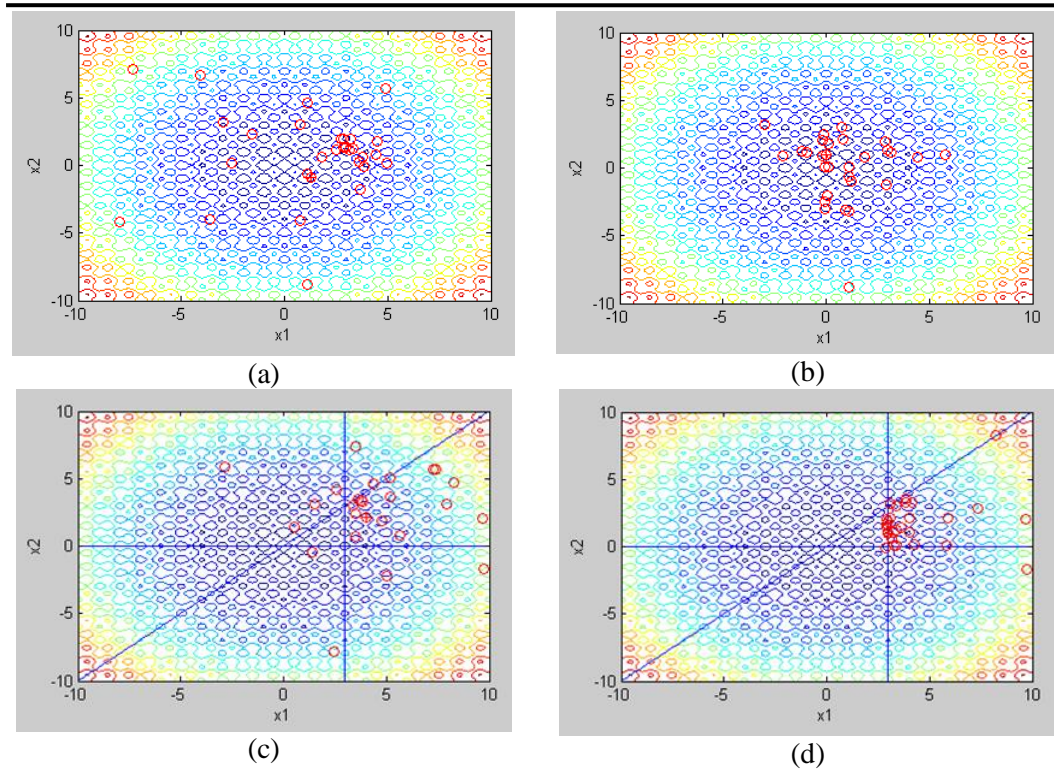
Gambar 3. (a)-(b) Proses Optimisasi Posisi Partikel Fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ tanpa Kendala, (c)-(d) Proses Optimisasi Posisi Partikel Fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ dengan Kendala



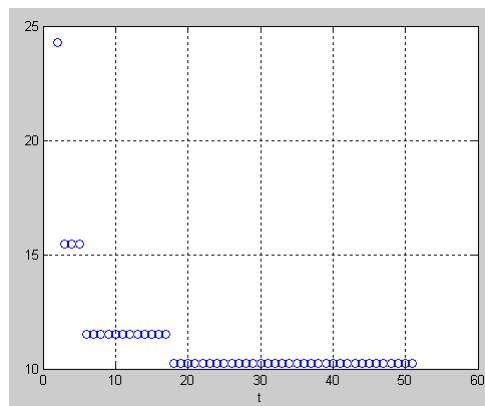
Gambar 4. Proses Optimisasi dengan PSO pada Nilai Fitness Fungsi $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ dengan Kendala

Hasil simulasi pada model 2 dapat dilihat pada Gambar 5 dan Gambar 6. Pada Gambar 5(a)-(b) terlihat proses optimisasi tanpa kendala dari iterasi pertama sampai iterasi maksimum. Pada Gambar 5(c)-(d) terlihat proses optimisasi dengan kendala dari iterasi pertama sampai iterasi maksimum. Pada iterasi pertama, partikel memilih posisi secara random. Pada proses optimisasi, berdasarkan proses update partikel, partikel bergerak mendekati solusi optimum yang dipengaruhi oleh nilai penalti jika partikel tidak memenuhi kendala. Gambar 6 memperlihatkan nilai fitness dari global best particle sebagai solusi optimal yang menurun dari iterasi awal sampai iterasi maksimum pada optimisasi berkendala.

Pada Tabel 2 menunjukkan hasil simulasi PSO dengan hasil nilai eksak pada optimisasi berkendala. Pada model 1, nilai x_1 dan x_2 yang dihasilkan PSO mendekati nilai x_1 dan x_2 dari solusi eksak sehingga mengakibatkan nilai $f(x_1, x_2)$ yang dihasilkan PSO juga mendekati nilai $f(x_1, x_2)$ dari solusi eksak. Pada model 2, nilai x_1 dan x_2 yang dihasilkan PSO mendekati nilai x_1 dan x_2 dari solusi eksak sehingga mengakibatkan nilai $f(x_1, x_2)$ yang dihasilkan PSO juga mendekati nilai $f(x_1, x_2)$ dari solusi eksak.



Gambar 5. (a)-(b) Proses Optimisasi Posisi Partikel Fungsi $f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2))$ tanpa Kendala, (c)-(d) Proses Optimisasi Posisi Partikel Fungsi $f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2))$ dengan Kendala



Gambar 6. Proses Optimisasi dengan PSO pada Nilai Fitness Fungsi $f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 + x_2^2 - 10(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2))$ dengan Kendala

Tabel 2. Hasil Simulasi PSO pada Optimisasi Berkendala

Model	x_1		x_2		$f(x_1, x_2)$	
	PSO	Eksak	PSO	Eksak	PSO	Eksak
1	3,036	3	0,084	0	9,22	9
2	2,977	3	0,99	0	10,22	9

KESIMPULAN

PSO dapat digunakan pada optimisasi dengan kendala. Namun dalam

update posisi partikel, supaya optimisasi memenuhi kendala, partikel akan dikenakan nilai penalti jika tidak memenuhi kendala. Simulasi diberikan pada dua model optimisasi. Hasil simulasi menunjukkan teknik penalti dapat menemukan pendekatan solusi optimal pada optimisasi berkendala.

DAFTAR RUJUKAN

- Gen, M., Cheng, R. (1997). *Genetic Algorithms and Engineering Design*. New York, USA : John Wiley and Sons
- Rao, S.S., (2009). *Engineering Optimization Theory and Practice*. New Jersey, USA : John Wiley and Sons
- Griva, I., Nash, S.G., Sofer, A. (2009). *Linear and Nonlinear Optimization*. Philadelphia, USA : Society for Industrial and Applied Mathematics
- Taha, H.A., (2007). *Operations Research : An Introduction*. New Jersey, USA : Prentice Hall
- Hillier, F.S., Lieberman, G.J., (2001). *Introduction to Operations Research*. New York, USA : Mc Graw Hill
- Kennedy, J., Eberhart, R.C., (1995). Particle Swarm Optimization. *Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks*, pp. 1942-1948
- Shi, Y.H., Eberhart, R.C., (1998). A Modified Particle Swarm Optimization. *Proc. Int. Conf. On Evolutionary Computation*, pp. 69-73
- Rahmalia, D. (2017). Particle Swarm Optimization-Genetic Algorithm (PSOGA) on Linear Transportation Problem. *AIP Conference Proceeding*, pp. (020030)1-12. doi : 10.1063/1.4994433
- Rahmalia, D., Herlambang, T., (2017). Prediksi Cuaca Menggunakan Algoritma Particle Swarm Optimization-Neural Network (PSOENN). *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya*, pp. 41-48
- Rahmalia, D., Herlambang, T., (2018). Optimisasi Masalah Transportasi Distribusi Semen Menggunakan Algoritma Artificial Bee Colony. *Multitek Indonesia*, 11(2).