DEKOMPOSISI $K_{m,m}$-(ANTI) AJAIB DARI $C_n[\overline{K_m}]$

Hendy[1], Siti Fatimah[2]
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum[1,2]
Komplek PP Darul Ulum Peterongan Jombang
hendyhendy17@gmail.com[1], seevad.unipdu17@yahoo.com[2]

Abstrak

Misalkan G dan H dua graf sederhana. Konsep tentang dekomposisi H-(anti)ajaib dari graf G timbul dari penggabungan dua permasalahan dalam graf yaitu permasalahan dekomposisi dan pelabelan. Lexicographic product dari G_1 dan G_2, $G_1[G_2]$, adalah graf yang diperoleh dengan cara mengganti setiap titik G_1 dengan copy dari G_2 dan mengganti setiap sisi $x_i x_j$ di G_1 dengan graf bipartit lengkap $K_{t,t}$. Keluarga (family) $\mathrm{B} = \{G_1, G_2, ..., G_k\}$ dari subgraf-subgraf di G disebut H-dekomposisi dari G jika semua subgraf-subgraf tersebut isomorf dengan H, $E(G_i) \cap E(G_i) = \{\ \}, i \neq j$, dan $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i) = E(G)$. Graf G disebut (a,d) H-antiajaib jika terdapat bijeksi $g : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |V(G)| + |E(G)|\}$ sedemikian sehingga total label titik dan sisi untuk setiap $B \in \mathrm{B}$, merupakan anggota $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(k-1)d\}$. Pada penelitian ini dibahas eksistensi dari dekomposisi $K_{m,m}$-antiajaib dari $C_n\left[\overline{K_m}\right]$ untuk $n > 3$, $m > 1$.

Kata Kunci : *Dekomposisi H-anti ajaib, komplemen graf, lexicographic product*

Abstract

Let H and G be two simple graphs. The concept of an H-magic decomposition of G arises from combination between graph decomposition and graph labeling. Lexicographic product from G_1 and G_2, $G_1[G_2]$, is a graph which arises from G_1 by replacing each vertex of G_1 with the copy of G_2 and replacing each edge $x_i x_j$ of G_1 with complete bipartite $K_{t,t}$. A family $\mathrm{B} = \{G_1, G_2, ..., G_k\}$ of subgraphs of G is an H-decomposition of G if all subgraphs are isomorphic to graph

H, $E(G_i)\cap E(G_j)=\{\ \}, i\neq j$ *and* $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)=E(G)$. *The graph G is said to be* (a,d) H*-antimagic if there is bijection* $g:V(G)\cup E(G)\rightarrow\{1,2,...,|V(G)|+|E(G)|\}$ *such that the total labels in* $B\in\mathrm{B}$ *are elements of* $\{a,a+d,a+2d,...,a+(k-1)d\}$. *In this paper we show that* $K_{m,m}$*-antimagic decompositions of* $C_n\left[\overline{K_m}\right]$ *for* $n>3$, $m>1$ *are exists.*

Keywords **:** *H-antimagic decomposition, graphs complement, lexicographic product*

1. Pendahuluan

Penelitian tentang graf mengalami perkembangan yang amat pesat. Beberapa diantaranya mengkombinasikan konsep-konsep yang sudah ada seperti konsep Dekomposisi graf dan Pelabelan graf. Beberapa penelitian tentang perpaduan konsep Dekomposisi dan Pelabelan telah dilakukan sebelumnya, diantaranya, *Cycle-supermagic decompositions of Complete multipartite Graphs* oleh Z. Liang (2012). Kemudian T.K. Maryati, A.N.M. Salman, E.T. Baskoro, J. Ryan, M. Miller juga melakukan penelitian tentang *On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph* (2010). Penelitian tentang Dekomposisi *H*-ajaib dari graf hasil *lexicographic product* telah dilakukan oleh Hendy dan A.N.M Salman pada tahun 2013. Pada penelitian ini dihasilkan beberapa teorema diantaranya *Graf* $\overline{C_n}\left[\overline{K_m}\right]$ *memiliki dekomposisi* $P_2\left[\overline{K_m}\right]$ *-ajaib jika dan hanya jika m genap atau m ganjil dan* $n\equiv 1(mod 4)$ *atau m ganjil dan* $n\equiv 2(mod 4)$ *atau m ganjil dan* $n\equiv 3(mod 4)$. Dari penelitian ini penulis tertarik untuk mengembangkan lebih jauh tentang graf hasil *Lexicographic Product*. Penulis tertarik untuk mengulas Dekomposisi $K_{m,m}$-antiajaib dari $C_n\left[\overline{K_m}\right]$.

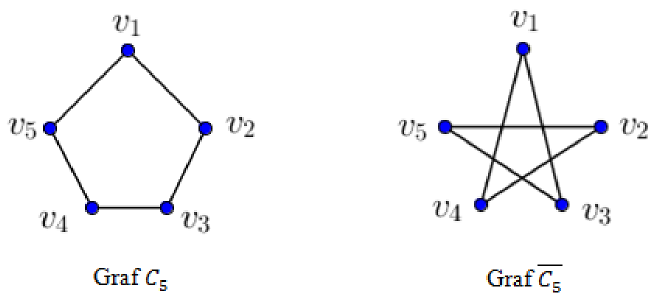
2. Tinjauan Pustaka

Definisi 2.1. Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (*V(G), E(G)*) dimana *V(G)* adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik *(vertex)* dan *E(G)* adalah himpunan dari pasangan tak terurut (*u*,*v*) dari titik-titik *u* dan *v* yang *berbeda* di *V(G)* yang disebut sisi *(edge)*. Selanjutnya sisi *e* = (*u*,*v*) pada graf *G* ditulis *e* = *uv*. Banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* yang dilambangkan dengan *p(G)*, sedangkan banyaknya unsur di *E* disebut *ukuran* dari *G* yang dilambangkan dengan *q(G).*

Definisi 2.2. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke semua titik yang lainnya. Graf lengkap dengan *n* buah titik dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah titik adalah *n(n-1) / 2* sisi.

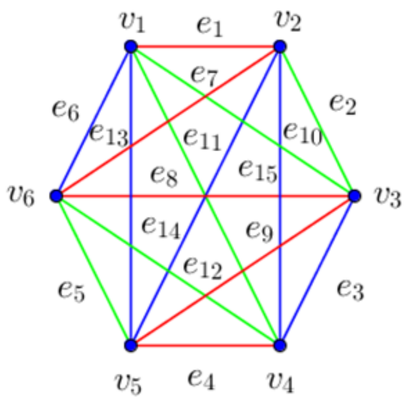
Definisi 2.3. Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan *n* titik dilambangkan dengan C_n.

Definisi 2.4. Komplemen dari graf G disimbolkan dengan $\overline{G}$ adalah graf dengan $V(G) = V(\overline{G})$ dan $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(\overline{G})$.



Gambar 2.1 graf C_5 dan komplemennya

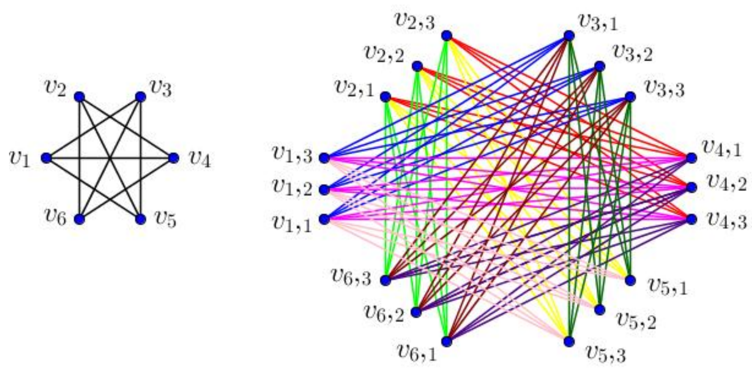
Definisi 2.5. Dekomposisi graf adalah sekumpulan atau koleksi $\{H_i\}$ dari subgraf G sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$ untuk setiap E_i subset $E(G)$ dan $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Jika $\{H_i\}$ adalah dekomposisi dari G, maka G dapat ditulis $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$, dimana n = $|\{H_i\}|$.



Gambar 2.2 Dekomposisi P_5 pada K_6

Graf G disebut (a,d) H-antiajaib jika terdapat bijeksi $g : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,|V(G)|+|E(G)|\}$ sedemikian sehingga total label titik dan sisi untuk setiap $B \in \mathrm{B}$, merupakan anggota $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(k-1)d\}$.

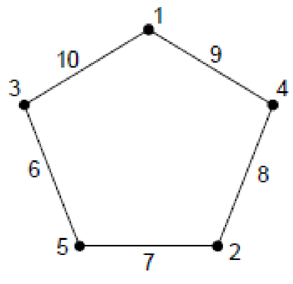
Definisi 2.6. *Lexicographic product* dari G_1 dan G_2, $G_1[G_2]$, adalah graf yang diperoleh dengan cara mengganti setiap titik G_1 dengan copy dari G_2 dan mengganti setiap sisi $x_i x_j$ di G_1 dengan graf bipartit lengkap $K_{t,t}$.



Gambar 2.3. graf $\overline{C_6}$ dan graf $\overline{C_6}[\overline{K_3}]$

Definisi 2.7. Pelabelan adalah pemetaan yang daerah asalnya (domain) merupakan beberapa himpunan elemen graf, himpunan titik-titik atau himpunan semua titik dan sisi yang daerah hasilnya (*range*) adalah himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan pada suatu graf sebarang adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Jika domain dari pemetaan adalah titik maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

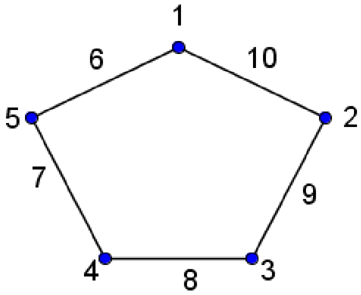
Definisi 2.8. Pelabelan total sisi ajaib (*edge-magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, h\}$ sehingga untuk sebarang sisi di G berlaku $\lambda(v) + \lambda(ve) + \lambda(e) = k$ untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib.



Gambar 2.4 Pelabelan total sisi ajaib dari graf C_5 dengan konstanta ajaib k = 14

Pada pelabelan total antiajaib berlaku syarat bahwa semua bobot berbeda nilai. Pada pelabelan total (a, d)-antiajaib berlaku syarat bahwa semua bobot membentuk barisan aritmatika yang didefinisikan pada suatu pelabelan $\lambda: V \cup E$

disebut pelabelan total (a,d)-antiajaib dari graf $G(V, E)$ bila himpunan semua bobot adalah membentuk barisan aritmatika untuk suatu bilangan positif a dan d, dimana a > 0 dan d > 0.



Gambar 2.5 Pelabelan total (12,1) –antiajaib dari C_5

3. Pembahasan

Teorema 3.1. *Graf* $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ *memiliki dekomposisi* $K_{m,m}$ *– anti ajaib untuk* $m \geq 2$.

Bukti :

a) Graf $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ dapat didekomposisi menjadi dua buah $K_{m,m}$ karena ketika mendekomposisi $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ menjadi beberapa subgraf $K_{m,m}$ sama halnya dengan mendekomposisi graf $\overline{C_4}$ terhadap sisi-sisinya. Graf $\overline{C_4}$ mempunyai dua buah sisi. Dengan demikian graf $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ dapat dipartisi menjadi dua buah $K_{m,m}$ untuk setiap $m \geq 2$.

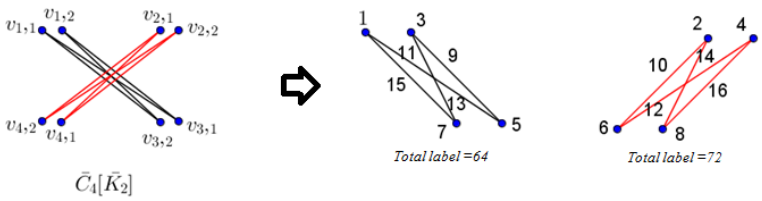
b) Berikutnya dilakukan pelabelan total anti ajaib pada graf $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ sedemikian sehingga total label pada masing-masing $K_{m,m}$ membentuk barisan aritmatika.
Kemudian untuk memberikan label pada titik dan sisi disetiap partisi, didefinisikan T_i adalah himpunan titik-titik pada partisi/subgraf ke *i* dan S_i adalah himpunan sisi-sisi pada partisi/subgraf ke *i*. Labeli titik-titik dengan aturan sebagai berikut:
$T_1 \to \{1 + i\ ; i = \{0,2,4,6 \dots (4m - 2)\}\}$
$T_2 \to \{2 + i\ ; i = \{0,2,4,6 \dots (4m - 2)\}\}$
Kemudian labeli sisi-sisi dengan aturan sebagai berikut:
$S_1 \to 4m + 1 + j\ ; j = \{0,2,4,6 \dots (U_n = a + (n-1)b)\}$
$S_2 \to 4m + 2 + j\ ; j = \{0,2,4,6 \dots (U_n = a + (n-1)b)\}$

Sehingga apabila pada setiap $K_{m,m}$ label pada titik dan sisi dijumlahkan maka akan menghasilkan sebuah partisi yang disebut dengan K_i dimana:

$$K_1 = \big(1 + 3 + 5 \dots + (4m - 1)\big) + \big(9 + 11 \dots (9 + (4 - 1) \cdot 2)\big)$$

$$K_2 = (2 + 4 + 6 \dots + (4m) + (10 + 12 \dots + (10 + (4 - 1) \cdot 2))$$

Dari a) dan b) terbukti bahwa *Graf* $\overline{C_4}[\overline{K_m}]$ *memiliki dekomposisi* $K_{m,m}$ *– anti ajaib*



Gambar 3.1 Dekomposisi $K_{2,2}$ (64,8) –antiajaib dari graf $C_4\left[\overline{K_2}\right]$

Teorema 3.2: *Graf* $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ *memiliki dekomposisi* $K_{m,m}$ *-anti ajaib untuk* $m \geq 2$.

Bukti :

a) Graf $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ dapat didekomposisi menjadi lima buah $K_{m,m}$ karena ketika mendekomposisi $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ menjadi beberapa subgraf $K_{m,m}$ sama halnya dengan mendekomposisi graf $\overline{C_5}$ terhadap sisi-sisinya. Graf $\overline{C_5}$ mempunyai lima buah sisi. Dengan demikian graf $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ dapat dipartisi menjadi lima buah $K_{m,m}$ untuk setiap ≥ 2 .

b) Berikutnya dilakukan pelabelan total anti ajaib pada graf $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ sedemikian sehingga total label pada masing-masing $K_{m,m}$ membentuk barisan aritmatika.

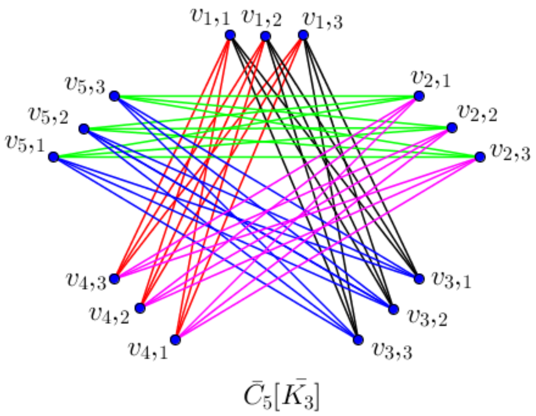
Kemudian untuk memberikan label pada titik dan sisi disetiap partisi, didefinisikan T_i adalah himpunan titik-titik pada partisi/subgraf ke *i* dan S_i adalah himpunan sisi-sisi pada partisi/subgraf ke *i*. Labeli titik-titik dengan aturan sebagai berikut:

$$T_i \rightarrow \{i + 5j\}; j = \{0, \dots, (m-1)\}\ dan\ i = \{1 \dots 5\}$$

Kemudian labeli sisi-sisi dengan aturan sebagai berikut:

$$S_i \rightarrow \{i + 5j\}; j = \{m, \dots, (2m-1)\} dan\ i = \{1, \dots, 5\}$$

Dari a) dan b) terbukti bahwa *Graf* $\overline{C_5}[\overline{K_m}]$ *memiliki dekomposisi* $K_{m,m}$ *-anti ajaib*



Gambar 2. Dekomposisi $K_{3,3}$ dari graf $C_5\left[\overline{K_3}\right]$

Contoh dari graf $\overline{C_5}[\overline{K_3}]$ dapat didekomposisikan menjadi lima buah $K_{3,3}$ karena jumlah partisi yang diperoleh sama dengan jumlah sisi pada graf C_n.

Untuk melabeli titik-titiknya sebagai berikut:

T_1	1	6	11	→ Untuk memberi label pada titik-titik di partisi 1
T_2	2	7	12	→ Untuk memberi label pada titik-titik di partisi 2
T_3	3	8	13	→ Untuk memberi label pada titik-titik di partisi 3
T_4	4	9	14	→ Untuk memberi label pada titik-titik di partisi 4
T_5	5	10	15	→ Untuk memberi label pada titik-titik di partisi 5

Untuk melabeli sisi-sisinya sebagai berikut:

S_1	16	21	26	31	36	41	46	51	56	→ Untuk memberi label pada sisi-sisi di partisi 1
S_2	17	22	27	32	37	42	47	52	57	→ Untuk memberi label pada sisi-sisi di partisi 2
S_3	18	23	28	33	38	43	48	53	58	→ Untuk memberi label pada sisi-sisi di partisi 3
S_4	19	24	29	34	39	44	49	54	59	→ Untuk memberi label pada sisi-sisi di partisi 4
S_5	20	25	30	35	40	45	50	55	60	→ Untuk memberi label pada sisi-sisi di partisi

										5

Untuk menghitung total jumlah dari nilai label-label pada sisi dengan mudah maka dapat menggunakan rumus barisan aritmatika yaitu sebagai berikut:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot n(a + U_n)$$

Keterangan:
a : Suku pertama pada label sisi
b : Beda pada setiap nilai pada label sisi
n : Banyak suku pada label sisi
U_n : suku ke n pada label sisi; $U_n = a + (n-1) \cdot b$
Kemudian dijumlah pada setiap partisinya adalah sebagai berikut:
$v \in V(T_1)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {1,6,11} dengan jumlah 18
$v \in V(T_2)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {2,7,12} dengan jumlah 21
$v \in V(T_3)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {3,8,13} dengan jumlah 24
$v \in V(T_4)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {4,9,14} dengan jumlah 27
$v \in V(T_5)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {5,10,15} dengan jumlah 30
$v \in V(S_1)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56} dengan jumlah 324
$v \in V(S_2)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57} dengan jumlah 333
$v \in V(S_3)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58} dengan jumlah 342
$v \in V(S_4)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59} dengan jumlah 351
$v \in V(S_5)$ dilabeli dengan bilangan-bilangan pada {20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60} dengan jumlah 360
Dilanjutkan dengan menjumlahkan label titik dan sisinya pada tiap-tiap partisi pada graf $\overline{C_5}[\overline{K_3}]$ sebagai berikut:
$T_1 + S_1 = 342$
$T_2 + S_2 = 354$
$T_3 + T_3 = 366$
$T_4 + T_4 = 378$
$T_5 + T_5 = 390$
Sehingga diperoleh jumlah dari masing-masing partisi yang membentuk barisan aritmatika dengan selisih 12, maka graf $\overline{C_5}[\overline{K_3}]$ mempunyai dekomposisi $(342{,}12)K_{2,2}$ -anti ajaib.

Teorema 3.3. *Graf $C_n[\overline{K_m}]$ memiliki dekomposisi $K_{m,m}$ -anti ajaib untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 2$.*

Bukti:

a) Graf $C_n[\overline{K_m}]$ dapat didekomposisi menjadi n buah $K_{m,m}$ karena ketika mendekomposisi $C_n[\overline{K_m}]$ menjadi beberapa subgraf $K_{m,m}$ sama halnya dengan mendekomposisi graf C_n terhadap sisi-sisinya. Graf C_n mempunyai n buah sisi. Dengan demikian graf $C_n[\overline{K_m}]$ dapat dipartisi menjadi n buah $K_{m,m}$ untuk setiap $n \geq 4$ dan $m \geq 2$.

b) Berikutnya dilakukan pelabelan total anti ajaib pada graf $C_n[\overline{K_m}]$ sedemikian sehingga total label pada masing-masing $K_{m,m}$ membentuk barisan aritmatika.

Kemudian untuk memberikan label pada titik dan sisi disetiap partisi, didefinisikan T_i adalah himpunan titik-titik pada partisi/subgraf ke *i* dan S_i adalah himpunan sisi-sisi pada partisi/subgraf ke *i*. Labeli titik-titik dengan aturan sebagai berikut:

$T_i \rightarrow \{i + nj\}; j = \{0, \dots, (m-1)\}\ dan\ i = \{1, \dots, n\}$

Kemudian labeli sisi-sisi dengan aturan sebagai berikut:

$S_i \rightarrow \{i + nj\}; j = \{m, \dots, (2m-1)\} dan\ i = \{1, \dots, n\}$

Jadi dari a) dan b) maka $C_n[\overline{K_m}]$ *memiliki dekomposisi* $K_{m,m}$ *-anti ajaib*

4. Penutup

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa jumlah partisi dari hasil pendekomposisian graf $C_n[\overline{K_m}]$ terhadap $K_{m,m}$ adalah sama dengan jumlah sisi pada graf C_n. Cara pelabelan titik dan sisi pada pembahasan diatas merupakan salah satu dari beberapa pelabelan total antiajaib yang bisa dilakukan karena *dekomposisi* $K_{m,m}$ *-anti ajaib* dari graf $C_n[\overline{K_m}]$ tidak tunggal.

Daftar Pustaka

Asnah, Bariroh. 2010. *Faktorisasi Graf Beraturan*, Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Fakultas Matematika UIN Maliki.

D. Froncek, P. Kovar, T. Kovarova *Constructing Distance Magic Graphs from Regular Graphs* 2000.

Doruri, Atmini. 2011. *Barisan dan Deret Bilangan*. *http://related:staff.uny.ac.id/sites/default/files/buku-panduan-ujian-tulis-keterampilan-snmptn2011.pdf barisan aritmatika pdf*. diakses tanggal 05-07-2014.

Hamzah, Syaiful. *Graph Theory*. *http://syaifulhamzah.files.wordpress.com/*. diakses tanggal 10-05-2014.

Hasmawati. 2009. *Alternatif Pembuktian dan Penerapan Teorema Boundy*. No. 03. Vol. 07. Hal. 04. *http://journal.unhas.ac.id/index.php/elen/article/download/225/207*. diakses tanggal 11-05-2014

Hendy. Salman, A.N.M. *Dekomposisi H-Ajaib Dari Graf Hasil Lexicographic product*. Bandung: Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.

Irawati, Dina. *Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Bintang*. No. 01. Vol. 02. Hal. 86. Padang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

Munawarah, Rina. 2009. *Dekomposisi Graf Komplit*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN).

Oktavy Liliyani, Nony. 2010. *Pelabelan Total Super Vertex-Magic Pada Cycle dan Graf Circulant*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surakarta: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sebelas Maret.

Parestu, Andrea. 2008. *Teori Graf dan Pelabelan Graf*. Jakarta: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia.

Rahman, Arif, dkk. *Pelabelan Total (a,d) –Sisi Anti Ajaib Pada Graf Petersen*. Padang: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Andalas.

T.K. Maryati, A.N.M. Salman, E.T. Baskoro, J. Ryan, M. Miller, *On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph*, Util. Math. 83(2010) 333-342.

T.K. Maryati, A.N.M. Salman, E.T. Baskoro, *Supermagic coverings of the union graphsand amalgamations*, Discrete Math. 313 (2013) 397-405.

Z. Liang, *Cycle-supermagic decompositions of Complete multipartite Graphs*, Discrete Mathematics 312 (2012) 3342-3348.