CAYLEY COLOR DIGRAPH DARI GRUP SIKLIK Z_n DENGAN *n* BILANGAN PRIMA

Abdul Jalil
Sekolah Tinggi Keguruan Ilmu Pendidikan PGRI Jombang
Jl. Patimura III/20
zidan_hilma@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif-kualitatif dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research) yaitu penelitian yang mengkaji kepustakaan, khususnya tentang Cayley Color Digraf dengan tujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material seperti buku-buku dan dokumen yang ada. Adapun permasalahan dalam penulisan ini adalah Bagaimana bentuk dari Cayley color digraph pada grup Siklik Z_n *dengan n bilangan prima. Hasil pembahasan menunjukkan dengan masing-masing generator pada n dapat diketahui bahwa Cayley Color Digraph dari grup Siklik* Z_n *merupakan Sikel Hamilton, sehingga bentuk dari Cayley Color Digraph pada grup Siklik* Z_n *adalah Digraph Hamilton. Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa bentuk Cayley Color Digraph dari grup Siklik adalah Digraf Hamilton.*

Kata kunci: *Cayley Color Digraph, Grup Siklik.*

Abstract

This research is a descriptive-qualitative research methods literature (Library Research) research that examines the literature, especially on Cayley Color digraph for the purpose of collecting data and information with the help of a variety of materials such as books and documents. The problem in this paper is how a form of Cayley color digraph on Cyclic group Zn with n primes. The results show discussion with each generator in n is known that Cayley Color digraph of a group Cyclic is Sikel Hamilton, so the form of the Cayley Color digraph on the group Cyclic Zn is digraph Hamilton. From the results of the discussion can be concluded that the shape of the Cayley Color digraph from Cyclic groups are digraphs Hamilton.

Keywords*: Cayley Color digraph, Cyclic Group.*

1. Pendahuluan

Sebagai salah satu dari cabang ilmu matematika, teori graf dan teori digraf sering dimanfaatkan dan digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, salah satu contohnya adalah masalah jembatan Konisberg dan merupakan suatu masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai yang mempunyai tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan dan dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah “Apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali ke tempat semula?. Seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah)-yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*).

Selain itu, teori graf dan Digraf juga dapat diaplikasikan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain, diantaranya aljabar abstrak, matematika diskrit, dan lain sebagainya. Salah satu pembahasan yang menarik dari aplikasi teori graf pada cabang ilmu matematika yang lain adalah graf yang dibentuk dari suatu grup dengan pembahasan tentang teori graf yang dibentuk dari grup di sini menjelaskan suatu digraf yang dikaitkan dengan grup dan subset dari grup yang disebut generator.

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang digraf yang diperoleh dari suatu grup, dengan judul ***” Cayley Color Digraph dari Grup Siklik*** Z_n ***dengan n Bilangan Prima”***.

Adapun yang menjadi pertanyaan dalam penulisan ini adalah Bagaimana bentuk dari *Cayley Color Digraph* pada grup Siklik Z_n dengan *n* bilangan prima. Oleh karena luasnya penelitian pada grup Siklik Z_n dengan *n* bilangan prima maka untuk tetap menjaga kedalaman pembahasan materi, maka penulisan ini dibatasi pada bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$.

1.1 Metode Penelitian

1.1.1. Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif yaitu penelitian yang pada umumnya bertujuan mendiskripsikan secara sistimati,faktual, dan akurat terhadap suatu populasi atau daerah tertentu mengenai berbagai sifat dan faktor tertentu (Santoso, 2005; 29).

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif-kualitatif, yaitu penelitian yang menggambarkan atau mendeskripsikan kejadian-kejadian yang menjadi pusat perhatian (karakteristik tingkat berpikir kreatif dan proses berpikir kreatif) secara kualitatif dan berdasar data kualitatif (siswono, 2006).

Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research) yaitu penelitian yang mengkaji kepustakaan khususnya tentang *Cayley Color Digraf* untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

1.1.2. Sumber data

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain: Chartrand & Linda Lesniak (Graph and Digraph second edition, 1986), Robin J. Wilson dan John J. Watkins (Graf an Introductiory Approach; 1990) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.1.3. Tehnik Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang graf dan aljabar abstrak serta sumber lain yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
2. Memahami dan mempelajari konsep *Cayley Color Digraph*.
3. Menentukan bentuk dari *Cayley Color Digraph* pada grup Siklik Z_n dengan n bilangan prima.
4. Membuktikan apakah pada grup Siklik Z_n dengan n bilangan prima memuat sikel Hamilton.

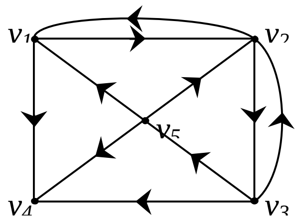
2. Kajian Teori

2.1 Definisi Digraf

Digraf (Graf berarah/ Directed Graf) D adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (u,v), yang mempunyai arah dari u ke v, dari titik-titik u,v di V yang disebut *busur*. Himpunan titik di D dinotasikan dengan $V(D)$ dan himpunan busur dinotasikan dengan $E(D)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 14 dan Wilson dan Watkins, 1990:81).

Himpunan titik di digraf D disebut order dari D dan dilambangkan dengan $p(D)$, atau p. Sedangkan himpunan busur pada digraf D adalah Size $q(D)$ atau q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15).

Perhatikan digraf D dengan himpunan titik $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, dan himpunan sisi $E(D) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_1, v_2v_5, v_3v_1, v_3v_4, v_5v_2, v_5v_2, v_5v_3, v_5v_4\}$berikut ini:

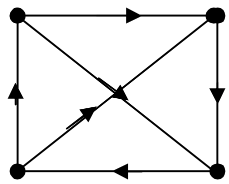


Gambar 2.1 Digraf

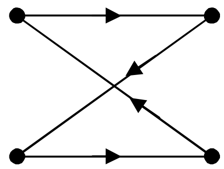
Jika a = (u,v) merupakan sisi dari digraf D, maka dikatakan bahwa a mengikuti u dan v, atau a terkait langsung dengan u dan terkait langsung dengan v, jika u terkait langsung dengan a dan v juga terkait langsung dengan a, maka u dikatakan terhubung langsung pada v dan v terhubung langsung dengan u.

2.2 Digraf Hamilton

Digraf G disebut Digraf hamilton apabila pada digraf (graf berarah) tersebut terdapat sikel hamilton atau *spanning sub graph* (sub graf merentang) yaitu setiap titik yang ada pada digraf tersebut hanya terlewati tepat satu kali dan kembali kepada titik yang semula, Berikut ini adalah contoh gambar digraf K_4 beserta sikel hamilton pada digraf K_4:



Gambar 2.2.a Digraf K_4



Gambar 2.2.b Sikel Hamilton pada Digraf K_4

2.3 *Cayley Color* Digraf

Misal G grup nontrivial, maka *Color digraph* dari grup G adalah digraph yang titik-titiknya adalah semua anggota G, dan busur dari *a* ke *b* diwarnai $a^{-1}b$, untuk setiap $a, b \in G$.

Misal diberikan Γ grup nontrivial yang berhingga dengan $\Delta = \{h_1, h_2, ..., h_k\}$ sebagai himpunan generator untuk Γ. Digraf yang dikaitkan dengan Γ dan Δ disebut *Cayley Color Digraph* dari Γ atas Δ dan dinotasikan dengan $D_\Delta(\Gamma)$. Himpunan titik dari $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ, oleh karena itu $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$. Masing-masing generator h_i disebut color atau warna. Untuk $g_1, g_2 \in \Gamma$ akan terdapat suatu busur (g_1, g_2) yang berwarna h_i di $D_\Delta(\Gamma)$ jika dan hanya jika $g_2 = g_1 h_i$. Jika h_i adalah suatu elemen yang berorder 2 (inversnya dirinya sendiri atau $(h_i)^2 = 1$) dan $g_2 = g_1 h_i$, maka diperoleh $g_2 = g_1 h_i$ (jika ruas kanan dan kiri sama-sama dikalikan h_i) yaitu $g_2 h_i = g_1 h_i h_i$, maka $g_2 h_i = g_1 h_i^2$ sehingga $g_2 h_i = g_1 1$ atau $g_1 = g_2 h_i$. Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ memuat busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1), dan jika kedua-duanya sama-sama berwarna h_i maka untuk pasangan busur ini cukup diwakili oleh sisi tunggal g_1, g_2. Sedangkan untuk busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1) yang berwarna h_i berbeda tetap diwakili oleh busur itu sendiri.

2.3 Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Atau dapat dikatakan operasi $\circ$ merupakan pemetaan dari S x S ke S. Operasi $\circ$ pada S yang merupakan operasi biner bersifat tertutup (Sukirman, 2005: 35).

Misalkan operasi $\circ$ pada S adalah suatu operasi biner, maka berlaku:

1. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat komuatif.
2. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, maka dikatakan bahwa operasi biner $\circ$ pada S bersifat assosiatif.
3. Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall a \in S$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $\circ$.
4. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian hingga $a \circ b = b \circ a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $\circ$. Invers dari a ditulis a^{-1}.

2.4 Grup Siklik

Definisi:

Misal *(G,o)* adalah grup. *(G,o)* dikatakan grup Siklik jika dan hanya jika terdapat $a \in G$ yang sedemikian hingga setiap elemen dari *G* dapat dibangkitkan/dibangun oleh *a*, dengan kata lain setiap elemen dari *G* dapat dituliskan sebagai perpangkatan dari *a*. *(Integral power of a).G* yang dibangun oleh *a* ditulis sebagai $G = \langle a \rangle$ atau $G = \{a^n \mid n \in Z\}$ $a \in G$ disebut sebagai generator atau pembangkit. Jika *G* dibangkitkan oleh elemen tunggal maka *(G,o)* disebut sebagai monogenik. (David; 1991)

Berikut ini diberikan cara untuk mengetahui generator pada M_6 dengan operasi penjumlahan:

Contoh: Diberikan grup $(M_6,+)$ dengan $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

1 = 1........................ $1 = 1^1$
1+1=2...................... $2 = 1^2$
1+1+1=3 .... $3 = 1^3$
1+1+1+1=4 .... $4 = 1^4$
1+1+1+1+1=5 .... $5 = 1^5$
1+1+1+1+1=6 .... $0 = 1^6$

1 adalah generator karena membangkitkan semua elemen $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ yang berarti $M_6 = \langle 1 \rangle$

2 = 2........................ $2 = 2^1$
2+2=4...................... $4 = 2^2$
2+2+2=0 .... $0 = 2^3$
2+2+2+2=2 .... $2 = 2^4$
2+2+2+2+2=4 .... $4 = 2^5$
2+2+2+2+2+2=0 ...... $0 = 2^6$

2 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0,2,4

3 = 3........................ $3 = 3^1$
3+3=0...................... $0 = 3^2$
3+3+3=3 .... $3 = 3^3$
3+3+3+3=0 .... $0 = 3^4$
3+3+3+3+3=3 .... $3 = 3^5$
3+3+3+3+3+3=0 ...... $0 = 3^6$

3 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0 dan 3

4 = 4........................ $4 = 4^1$
4+4=2...................... $2 = 4^2$
4+4+4=0 .... $0 = 4^3$
4+4+4+4=4 .... $4 = 4^4$
4+4+4+4+4=2 .... $2 = 4^5$
4+4+4+4+4+4=0....... $0 = 4^6$

4 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0, 2, dan 4

5 = 5 .... $5 = 5^1$
5+5=10.................... $4 = 5^2$

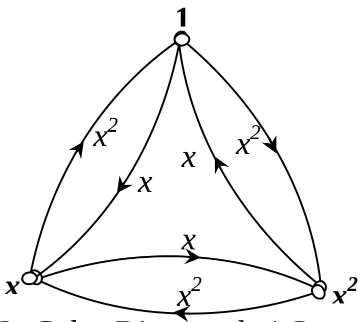
5+5+5=15................ 3 = 5^3
5+5+5+5=20 .... 2 = 5^4
5+5+5+5+5=25 .... 1 = 5^5
5+5+5+5+5+5=0....... 0 = 5^6

5 merupakan generator dari M_6 karena membangkitkan semua elemen M_6={0,1,2,3,4,5} yang berarti $M_6 = \langle 5 \rangle$

Jadi $(M_6,+)$ dengan M_6= {0,1,2,3,4,5} memiliki dua generator yaitu $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$. (Raisinghania; 1980)

3. Pembahasan

Pada Bab ini, akan dibahas mengenai masalah *Cayley color Digraf* dari grup Siklik Z_n pada bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$, serta menyajikannya dalam bentuk gambar. Gambar 3 berikut ini merupakan contoh dari *color digraph dari grup siklik* Z_n.



Gambar 3. *Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

3.1. *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

Dari gambar *color Digraph* dari grup Siklik Z_3 pada gambar 3 dapat dicari *Cayley Color Digraph*nya. Adapun untuk menetukan *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_3 dapat dilakukan dengan cara memilih generator dari elemen grup Siklik. Untuk menentukan elemen-elemen yang akan digunakan adalah dengan cara mengambil warna pada *color digraph*nya.

Misal Γ dinotasikan sebagai grup Siklik Z_3 di mana himpunannya tersebut beranggotakan 3 yaitu: $\{1, x, x^2\}$. Adapun pasangan generator yang dapat membangkitkan grup Siklik Z_3 yaitu: $\{x, x^2\}$. Pasangan generator tersebut akan diuji satu persatu sebaigaimana berikut:

1 .... $1 = 1^1$
$1 \circ 1 = 1$ .... $1 = 1^2$
$1 \circ 1 \circ 1 = 1$....................$1 = 1^3$

1 hanya bisa membangkitkan dirinya sendiri sehingga 1 bukan generator dari Z_3

x.............................. $x = x$
$x \circ x = x^2$ .... $x^2 = x^2$
$x \circ x \circ x = x^3$ .... $x^3 = 1$

x dapat membangkitkan semua elemen pada Z_3, oleh karena itu x adalah generator pada Z_3

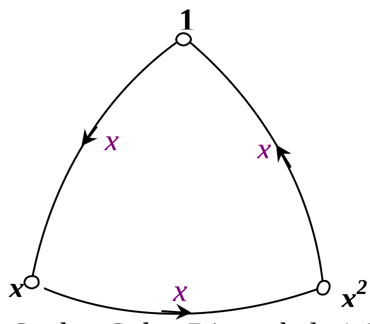
$$x^2 \text{ ....} x^2 = x^2$$
$$x^2 \circ x^2 = x^4 \text{ ....} x^4 = x$$
$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^6 \text{ ....} x^6 = 1$$

x^2 dapat membangkitkan semua elemen Z_3, oleh karena itu x^2 adalah generator pada Z_3.

Berikut hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan warna $\Delta = \{x\}$:

1. $1 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup Siklik Z_3 dengan generator $\{x\}$ adalah sebagaimana gambar berikut:

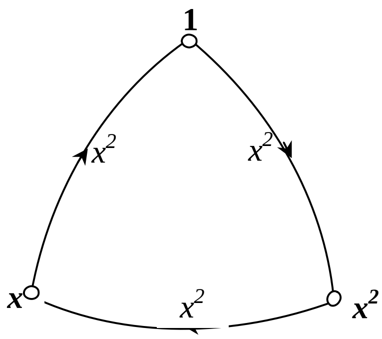


Gambar 3.1a *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

Sedangkan hasil Cayley Color Digraph $D_\Delta(\Gamma)$ dengan generator x2 adalah:

1. $1 = x \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x ke 1 yang berwarna x^2
2. $x = x^2 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x yang berwarna x^2
3. $x^2 = 1 \circ x^2$ sehingga terdapat busur dari 1 ke x^2 yang berwarna x^2

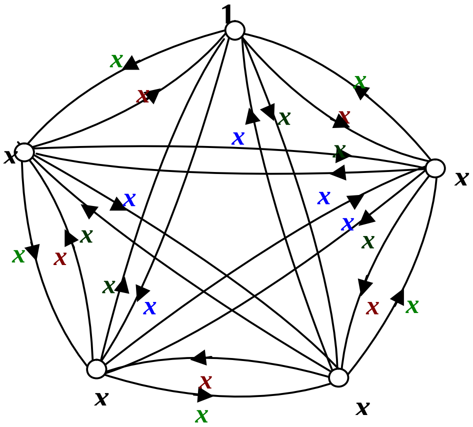
Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup Siklik Z_3 tersebut dapat digambarkan dengan digraph berikut:



Gambar 3.1b *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik

Dari kedua gambar 3.1a dan 3.1b *Cayley Color Digraph* dengan masing-masing generator {x} dan {x^2} dapat diketahui bahwa *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_3 merupakan Sikel Hamilton pada grup Siklik Z_3, sehingga *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_3 disebut *Digraph* hamilton.

3.2 *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_5



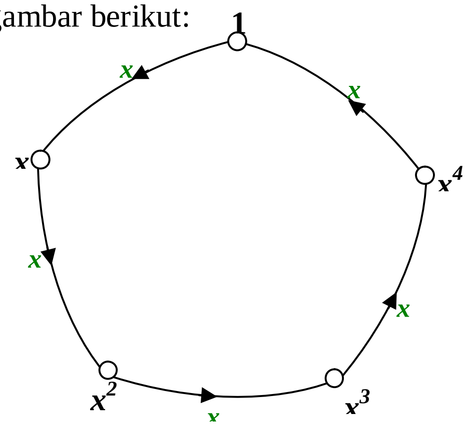
Gambar 3.2a *Color Digraph* Pada Grup Siklik Z_5

Setelah dari Z_5 adalah $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ dan sebagai contoh hanya memilih generator {x}

Berikut hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan warna $\Delta = \{x\}$:

1. $1 = x^4 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari *1* ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x
4. $x^3 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^3 yang berwarna x
5. $x^4 = x^3 \circ x$ sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^4 yang berwarna x

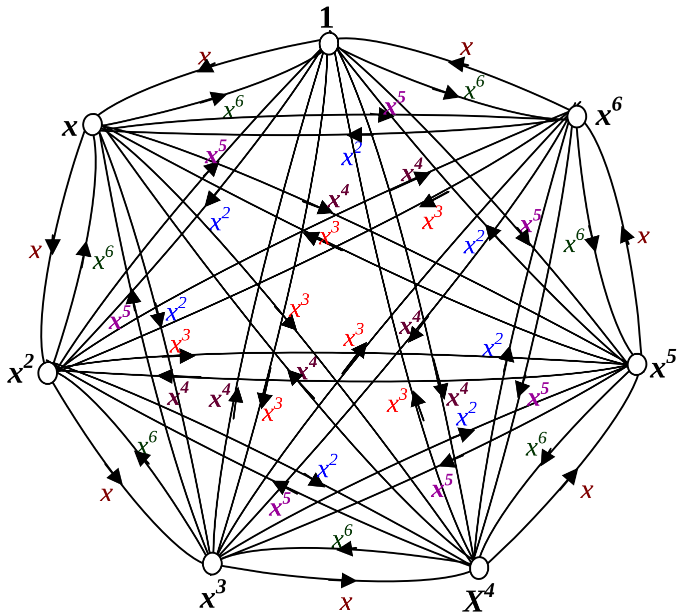
Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup Siklik Z_5 dengan generator {x} adalah sebagaimana gambar berikut:



Gambar 3.2.b *Cayley Color Digraph* Pada Grup Siklik Z_5

3. 3 *Cayley Color Digraph* Pada Grup Siklik Z_7

Setelah dilakukan pengujian maka diperoleh generator yang dapat membangkitkan grup Siklik Z_7 yaitu: $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$. dan sebagai contoh hanya memilih generator {x}.

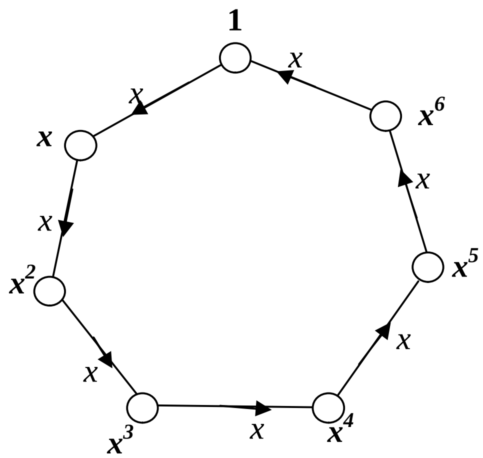


Gambar 3.3a. *Color Digraph* pada Grup Siklik Z_7

Hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan generator $\Delta = \{x\}$ adalah:

1. $1 = x^6 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x
4. $x^3 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^3 yang berwarna x
5. $x^4 = x^3 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^4 yang berwarna x
6. $x^5 = x^4 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^5 yang berwarna x
7. $x^6 = x^5 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke x^6 yang berwarna x

Jadi hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup Siklik Z_7 dengan generator $\{x\}$dalam bentuk gambar adalah sebagaimana berikut:



Gambar 3.3b *Cayley Color Digraph* Z_7

Dari gambar *Cayley Color Digraph* diatas dapat diketahui bahwa *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_7 memuat Sikel Hamilton, sehingga *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_7 disebut *Digraph* Hamilton.

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian sebagaimana yang telah penulis uraikan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_n memuat Sikel Hamilton, sehingga bentuk *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik Z_n adalah Digraf Hamilton.

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pembahasan masalah *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup Siklik Z_n dengan $3 \le n \le 7$, maka untuk penulisan disarankan untuk mengkaji lebih dalam tentang *Cayley Color Digraph* dari suatu grup yang lain, atau dapat pula mengkaji *Cayley Color Digraph* dari grup Siklik dengan ordo yang lebih tinggi.

Daftar Pustaka

Chartrand, G. and Lesniak, L. (1986). *Graphs and Digraphs Second Edition*. California.

David, S. D. and Richard, M. F. (1991). *Abstract Algebra.*USA.

Raisinghania. M.D. and Aggarwal, R.S. (1980). *Modern Algebra*. New Delhi:S. Chand & Company LTD.

Siswono, T. Y. E. dan Budayasa, I K. *(*2006). *Implementasi teori tentangTingkat berpikir kreatif dalam matematika.* Makalah disampaikan Seminar Konferensi Nasional Matematika XIII dan Konggres Himpunan Matematika Indonesia di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Sukirman. (2005). *Pengantar Aljabar Abstrak.* Malang: Universitas Negeri malang (UM PRESS).

Wilson, R. J. and Watkins. (1990). *Graph and Introductory Approach*. Open University course: Singapore