KONSTRUKSI HOMOMORFISMA PADA GRUP BERHINGGA

I Ketut Suastika
Pend. Matematika Univ. Kanjuruhan Malang
Suastika_cipi@yahoo.co.id

Abstrak

Pada tulisan ini, penulis mencoba mengkonstruksi homomorfisma grup dari grup berhingga (A,.) ke grup berhingga (Z_4,+). Karena homomorfisma grup merupakan suatu fungsi, maka dalam mengkonstruksinya diawali dengan membentuk fungsi dari grup berhingga (A,.) ke grup berhingga (Z_4,+). Di sini jelas tidak semua fungsi yang terbentuk akan merupakan homomorfisma grup, sehingga perlu dilakukan pengecekan terhadap fungsi yang diperoleh. Adapun fungsi yang terbentuk dari grup (A,.) ke grup (Z_4,+) sebanyak 256, dan dari jumlah itu yang terbukti merupakan homomorfisma grup sebanyak 4 fungsi.

Kata kunci : *grup berhingga, fungsi, homomorfisma grup*

Abstract

In this paper, the author tries to construct a group homomorphism of finite groups (A,.) to a finite group (Z4, +). Since the group homomorphism is a function, then the construct begins by establishing the function of a finite group (A,.) to a finite group (Z4, +). Here, clearly not all functions will be formed a group homomorphism, so it needs to be checked against the function obtained. The functions are composed of groups (A,.) Group (Z4, +) of 256, and of that amount proved to be a group homomorphism by 4 functions.

Keywords: *finite groups, group homomorphism*

1. Pendahuluan

Kita mungkin dengan mudah dapat mengatakan homomorfisma atau bukan apabila diberikan fungsi dari suatu domain ke kodomain, tetapi mungkin kita akan sedikit kesulitan untuk membuat suatu homomorfisma apabila hanya diberikan dua buah grup . Lebih-lebih kalau kita diberikan dua grup yang berhingga, terus kita disuruh membuat hommorfisma dari dua grup itu, tentu bukan pekerjaan yang mudah. Kalau kita hanya diberikan dua grup yang berhingga tentu kita tidak dapat dengan serta merta langsung membuat sebuah aturan fungsi dari dua grup itu. Dalam hal ini kita perlu membentuk fungsi dengan meggunakan diagram panah atau pasangan berurutan dari dua grup tersebut. Setelah selesai membuat diagram panah atau pasangan berurutan, kita harus melakukan pengecekan apakah fungsi yang dibentuk tersebut merupakan homomorfisma atau bukan. Tentu hal itu bukan sesuatu yang bisa dengan cepat dilakukan. Oleh karena itu pada penulisan ini penulis mengambil judul “Konstruksi Homomorfisma Pada Grup Berhingga”.

2. Kajian Teori

1. Grup

Diketahui G himpunan yang tak kosong dan ”$*$" operasi biner pada G. Himpunan G disebut grup terhadap operasi ”$*$” jika memenuhi aksioma berikut :

1. Operasi “*” bersifat asosiatif
2. Terdapat $e \in$ G sehingga untuk setiap $a \in$ G berlaku $e * a = a * e = a$
3. Untuk setiap $a \in$ G terdapat $a^{-1} \in$ G sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Elemen $e \in$ G pada aksioma 3 disebut dengan *elemen identitas* terhadap operasi *
Elemen $a^{-1} \in$ G pada aksioma 4 dikatakan *invers* elemen a terhadap operasi $*$.

Untuk selanjutnya, bila G dilengkapi dengan operasi * dituliskan dengan (G,*).

Contoh 1.

Misalkan A = { 1 , - 1 , - i , i } dengan i = √ - 1. Pada A dilengkapi dengan operasi perkalian (.)
Hasil operasi dari A terhadap operasi perkalian dapat dituliskan sbb.

•	1	-1	-i	i
1	1	-1	-i	i
-1	-1	1	i	-i
-i	-i	i	-1	1
I	i	-i	1	-1

Dari tabel tersebut diperoleh:

1. Karena hasil operasi dari operasi perkalian tersebut kembali merupakan anggota-anggota A maka kita katakan operasinya bersifat tertutup
2. Operasi (.) jelas asosiatif
3. 1 sebagai identitas pada A karena untuk setiap anggota A kalau dikalikan 1 hasilnya tetap bilangan itu sendiri
4. invers dari 1 adalah 1
   invers dari -1 adalah -1
   invers dari i adalah –i
   invers dari –i adalah i

Contoh 2.

Diberikan Z_4 = { 0 , 1 , 2 , 3 }. Pada Z_4 dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+)
Hasil operasi pada Z_4 terhadap operasi penjumlahan dapat dituliskan sbb.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Dari tabel tersebut diperoleh:

1. Operasi ”+” pada Z_4 adalah tertutup
2. Operasi ”+” pada Z_4 adalah asosiatif
3. 0 sebagai identitas pada Z_4 terhadap operasi ”+”
4. Invers dari 0 adalah 0
   invers dari 1 adalah 3
   invers dari 2 adalah 2
   invers dari 3 adalah 1

Teorema 1. (Hukum Kanselasi)
Misalkan (G, *) grup. Jika a,b,c $\in$ G maka berlaku: jika a*c = b*c maka a=b
Bukti :
Diberikan a*c = b*c
Menurut definisi grup, untuk c $\in$ G, ada t $\in$ G sedemikian sehingga c*t = e.
Maka untuk a*c = b*c diperoleh (a*c)*t = (b*c)*t
Tetapi (a*c)*t = a*(c*t) = a*e = a, dan (b*c)*t = b*(c*t) = b*e = b
Ini berarti a=b.

1.1. Subgrup

Misalkan (G , $*$) merupakan grup. Himpunan H $\neq \emptyset$ dan H $\subseteq$ G disebut subgrup dari G jika (H , $*$) juga merupakan grup.

Contoh 3.

Menurut contoh 1, (A, .) merupakan grup. Subgrup-subgrupnya adalah: { 1 }, { 1,-12 } dan A sendiri

Contoh 4.

Menurut contoh 2, (Z_4, +) merupakan grup. Subgrup-subgrupnya adalah:
{ 0 }, { 0, 2 }, Z_4 sendiri

Teorema 2

Jika G adalah grup terhadap operasi * dan H subset dari G. Tunjukkan bahwa H subgrup dai G jika dan hanya jika

(i) H $\neq \emptyset$

(ii) Apabila a, b $\in$ H maka a * $b^{-1} \in$ H.

Dari (i), jika H $\neq \emptyset$, tentu ada a $\in$ H sehingga dengan menggunakan (ii) diperoleh a * a^{-1} = e $\in$ H. Karena e, a $\in$ H maka e * $a^{-1} = a^{-1} \in$ H.

Jika a, b $\in$ H, tentu a, $b^{-1} \in$ H, sehingga a * $(b^{-1})^{-1}$ = a * b $\in$ H.

Jadi terbukti bahwa: 1. operasi * merupakan operasi biner pada H

2. operasi * asosiatif [karena (G,*) grup]

3. e $\in$ H

4. untuk a $\in$ H $\Rightarrow a^{-1} \in$ H.

Ini berarti H merupakan grup. Karena H subset G tentu H merupakan subgrup dari G.

Seballiknya jika H adalah subgrup dari G terhadap operasi *, maka jelas sifat (i) dan (ii) terpenuhi.

1.2. Order dari grup

Order dari suatu grup berhingga G adalah banyaknya anggota dari grup G. Notasi untuk order dari grup G adalah o(G) atau |G|.

Contoh 5:

Order dari grup (A, .) dari contoh 1adalah 4.

Order dari subgroup (A, .), yaitu { 1, -1 } adalah 2

Contoh 6:

Order dari grup (Z_4, +) dari contoh 2 adalah 4

Order dari subgroup (Z_4, +), yaitu { 0, 2 } adalah 2.

2. Homomorfisma grup

Diberikan grup $(G, *)$ dan $(G', *')$. Fungsi $\varphi : G \to G'$ disebut homomorphisma grup, jika untuk setiap $a,b \in G$ berlaku $\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$.

Contoh 7

Diketahui $g : (R^+, .) \to (R, +)$ adalah fungsi dengan g(x) = log x.
Pemetaan g merupakan homorphisma grup, karena:
Untuk sebarang $a,b \in R$, maka $g(a.b) = \log(a . b)$
$= \log a + \log b$
$= g(a) + g(b)$

Contoh 8.

Z adalah grup dari himpunan bilangan bulat terhadap operasi jumlahan. Untuk setiap bilangan bulat x didefinisikan fungsi $\varphi : (Z, +) \to (Z, +)$ dengan $\varphi(x) = 2x$. Fungsi φ merupakan homomorfisma grup, karena:

Untuk sembarang $x,y \in Z$, maka $\varphi(x+y) = 2(x + y)$

$= 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y)$

Teorema 3.

Diketahui G dan G' grup dan $\Phi: G \to G'$merupakan homomorphisma grup, maka hal-hal berikut berlaku :

1. Jika *e* merupakan elemen identitas di G, maka $\Phi(e)$ merupakan elemen identitas di G' ($\Phi(e) = e'$)
2. Jika $a \in G$, maka $\Phi(a^{-1}) = (\Phi(a))^{-1}$
3. Jika K subgrup pada G, maka $\Phi(K)$ merupakan subgrup pada G'
4. Jika K' merupakan subgrup pada G', maka $\Phi^{-1}(K')$ merupakan subgrup pada G

Bukti :

1. $\Phi(x).e' = \Phi(x) = \Phi(x.e) = \Phi(x).\,\Phi(e)$
   Dengan sifat kanselasi peroleh $e' = \Phi(e)$.
2. $e' = \Phi(e) = \Phi(x.x^{-1}) = \Phi(x).\,\Phi(x^{-1})$
   Di lain pihak $\Phi(x).\,(\Phi(x))^{-1} = e'$
   Sehingga diperoleh $\Phi(x).\,(\Phi(x))^{-1} = \Phi(x).\,\Phi(x^{-1})$
   Akibatnya $\Phi(x^{-1}) = (\Phi(x))^{-1}$
3. Jelas $e' \in \Phi(K)$, karena untuk $e \in K$ maka $e' = \Phi(e)$
   Untuk $x,y \in \Phi(K)$, maka terdapat $a,b \in K$ sehingga $x = \Phi(a)$ dan $y = \Phi(b)$.
   Selanjutnya, $x.y^{-1} = \Phi(a)\,.\,[\Phi(b)]^{-1} = \Phi(a)\,.\,\Phi(b^{-1}) = \Phi(a\,.\,b^{-1})$
   Karena $a, b \in K$ jelas $a.b^{-1} \in K$ (K subgroup)
   Ini berarti, terdapat $a.b^{-1} \in K$ sehingga $x\,.\,y^{-1} = \Phi(a.\,b^{-1}) \in \Phi(K)$
   Terbukti $\Phi(K)$ subgroup.

4. Jelas $e \in \Phi^{-1}(K')$, karena untuk $e' \in K'$ maka $e = \Phi^{-1}(e')$
   Untuk sembarang $x,y \in \Phi^{-1}(K')$, maka terdapat $a,b \in K'$ sehingga $a = \Phi(x)$ dan $b = \Phi(y)$
   Selanjutnya $ab^{-1} = \Phi(x)\,[\Phi(y)]^{-1} = \Phi(x)\,\Phi(y^{-1}) = \Phi(xy^{-1})$
   Karena $a,b \in K'$ jelas $ab^{-1} \in K'$ (K' subgrup)
   Ini berarti terdapat $ab \in K'$ sehingga $xy^{-1} \in \Phi^{-1}(K')$

1. Konstruksi Homomorfisma

Pada konstruksi di sini akan dibuat homomorfisma dengan domain grup (A,.) pada contoh 1, dan kodomainnya adalah grup (Z_4,+) pada contoh 2.
Pada konstruksi ini, kita awali dengan membentuk fungsi dari A ke Z_4. Karena banyaknya anggota A = 4, dan banyaknya anggota Z_4= 4 maka akan kita dapatkan banyaknya fungsi adalah 4^4= 256 fungsi. Mengingat halaman yang diberikan terbatas, maka tidak semua fungsi tersebut ditampilkan di sini. Dari 256 fungsi yang ada akan kita tampilkan adalah yang ditengarai merupakan homomorfisma saja. Hal ini bisa dilakukan dengan menggunakan teorema 3 di atas.

Misalkan kita anggap teorema 3 sebagai implikasi ”jika p maka q”. Dalam hal ini p dikatakan *anteseden* dan q dikatakan *konskwen*. Kita semua tahu bahwa nilai kebenaran implikasi ”jika p maka q” akan sama dengan nilai kebenaran kontraposisinya, yaitu ” jika ~q maka ~p”. Artinya, pada teorema 3, jika kita membuat fungsi dengan salah satu dari empat ketentuan pada *konskwen* tidak dipenuhi maka fungsi yang dibuat jelas bukan merupakan homomorfisma. Karena itu, untuk membuat fungsi yang ditengarai sebagai homomorfisma tentunya fungsi yang dibuat memenuhi keempat ketentuan *konskwen* pada teorema 3.

Selanjutnya, fungsi yang dibuat dari A ke Z_4 yang memenuhi keempat konskwen pada teorema 3, (dan juga berpegangan pada contoh 1, 2, 3, dan 4) diperoleh:

1. R_1 = { (1,0), (-1,0), (i,0), (-i,0) }
2. R_2 = { (1,0), (-1,0), (i,2), (-i,2) }
3. R_3 = { (1,0), (-1,2), (i,1), (-i,3) }
4. R_4 = { (1,0), (-1,2), (i,3), (-i,1) }
5. R_5 = { (1,0), (-1,2), (i,0), (-i,0) }
6. R_6 = { (1,0), (-1,2), (i,2), (-i,2) }

Selanjutnya, dari 6 fungsi yang ditemukan, akan dibuktikan fungsi mana yang merupakan homomorfisma.

Misalkan fungsi dari A ke Z_4 kita beri nama fungsi φ.

1. Untuk R_1.
   $\varphi(1.1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.1)= \varphi(1)+ \varphi(1)$
   $\varphi(1. -1)=\varphi(-1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(-1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.-1) = \varphi(1)+ \varphi(-1)$
   $\varphi(1.i)= \varphi(i)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.i)= \varphi(1)+ \varphi(i)$
   $\varphi(1. -i)= \varphi(-i)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(-i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1. -i)= \varphi(1)+ \varphi(-i)$
   $\varphi(-1. -1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(-1. -1)= \varphi(-1)+ \varphi(-1)$
   $\varphi(-1.i)= \varphi(-i)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(-1.i)= \varphi(-1)+ \varphi(i)$
   $\varphi(-1.-i)= \varphi(i)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(-1.-i)= \varphi(-1) + \varphi(-i)$
   $\varphi(i.i)= \varphi(-1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(i.i)= \varphi(i)+ \varphi(i)$
   $\varphi(i. -i)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(-i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(i. -i)= \varphi(i)+ \varphi(-i)$
   $\varphi(-i. -i)= \varphi(-1)=0$ dan $\varphi(-i)+\varphi(-i)=0+0=0$, sehingga $\varphi(-i. -i)= \varphi(-i)+ \varphi(-i)$
   Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_1 merupakan homomorfisma grup.

2. Untuk R_2
   $\varphi(1.1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.1)= \varphi(1)+ \varphi(1)$
   $\varphi(1. -1)=\varphi(-1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(-1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.-1) = \varphi(1)+ \varphi(-1)$
   $\varphi(1.i)= \varphi(i)=2$ dan $\varphi(1)+\varphi(i)=0+2=2$, sehingga $\varphi(1.i)= \varphi(1)+ \varphi(i)$
   $\varphi(1. -i)= \varphi(-i)=2$ dan $\varphi(1)+\varphi(-i)=0+2=2$, sehingga $\varphi(1. -i)= \varphi(1)+ \varphi(-i)$
   $\varphi(-1. -1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(-1. -1)= \varphi(-1)+ \varphi(-1)$
   $\varphi(-1.i)= \varphi(-i)=2$ dan $\varphi(-1)+\varphi(i)=0+2=2$, sehingga $\varphi(-1.i)= \varphi(-1)+ \varphi(i)$
   $\varphi(-1.-i)= \varphi(i)=2$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-i)=0+2=2$, sehingga $\varphi(-1.-i)= \varphi(-1) + \varphi(-i)$
   $\varphi(i.i)= \varphi(-1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(i)=2+2=0$, sehingga $\varphi(i.i)= \varphi(i)+ \varphi(i)$
   $\varphi(i. -i)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(-i)=2+2=0$, sehingga $\varphi(i. -i)= \varphi(i)+ \varphi(-i)$
   $\varphi(-i. -i)= \varphi(-1)=0$ dan $\varphi(-i)+\varphi(-i)=2+2=0$, sehingga $\varphi(-i. -i)= \varphi(-i)+ \varphi(-i)$
   Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_2 merupakan homomorfisma grup.

3. Untuk R_3

$\varphi(1.1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.1)= \varphi(1)+ \varphi(1)$
$\varphi(1. -1)=\varphi(-1)=2$ dan $\varphi(1)+\varphi(-1)=0+2=2$, sehingga $\varphi(1.-1) = \varphi(1)+ \varphi(-1)$
$\varphi(1.i)= \varphi(i)=1$ dan $\varphi(1)+\varphi(i)=0+1=1$, sehingga $\varphi(1.i)= \varphi(1)+ \varphi(i)$
$\varphi(1. -i)= \varphi(-i)=3$ dan $\varphi(1)+\varphi(-i)=0+3=3$, sehingga $\varphi(1. -i)= \varphi(1)+ \varphi(-i)$
$\varphi(-1. -1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-1)=2+2=0$, sehingga $\varphi(-1. -1)= \varphi(-1)+ \varphi(-1)$
$\varphi(-1.i)= \varphi(-i)=3$ dan $\varphi(-1)+\varphi(i)=2+1=3$, sehingga $\varphi(-1.i)= \varphi(-1)+ \varphi(i)$
$\varphi(-1.-i)= \varphi(i)=1$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-i)=2+3=1$, sehingga $\varphi(-1.-i)= \varphi(-1) + \varphi(-i)$
$\varphi(i.i)= \varphi(-1)=2$ dan $\varphi(i)+\varphi(i)=1+1=2$, sehingga $\varphi(i.i)= \varphi(i)+ \varphi(i)$
$\varphi(i. -i)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(-i)=1+3=0$, sehingga $\varphi(i. -i)= \varphi(i)+ \varphi(-i)$
$\varphi(-i. -i)= \varphi(-1)=2$ dan $\varphi(-i)+\varphi(-i)=3+3=2$, sehingga $\varphi(-i. -i)= \varphi(-i)+ \varphi(-i)$

Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_3 merupakan homomorfisma grup.

4. Untuk R_4

$\varphi(1.1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(1)+\varphi(1)=0+0=0$, sehingga $\varphi(1.1)= \varphi(1)+ \varphi(1)$
$\varphi(1. -1)=\varphi(-1)=2$ dan $\varphi(1)+\varphi(-1)=0+2=2$, sehingga $\varphi(1.-1) = \varphi(1)+ \varphi(-1)$
$\varphi(1.i)= \varphi(i)=3$ dan $\varphi(1)+\varphi(i)=0+3=3$, sehingga $\varphi(1.i)= \varphi(1)+ \varphi(i)$
$\varphi(1. -i)= \varphi(-i)=1$ dan $\varphi(1)+\varphi(-i)=0+1=1$, sehingga $\varphi(1. -i)= \varphi(1)+ \varphi(-i)$
$\varphi(-1. -1)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-1)=2+2=0$, sehingga $\varphi(-1. -1)= \varphi(-1)+ \varphi(-1)$
$\varphi(-1.i)= \varphi(-i)=1$ dan $\varphi(-1)+\varphi(i)=2+3=1$, sehingga $\varphi(-1.i)= \varphi(-1)+ \varphi(i)$
$\varphi(-1.-i)= \varphi(i)=3$ dan $\varphi(-1)+\varphi(-i)=2+1=3$, sehingga $\varphi(-1.-i)= \varphi(-1) + \varphi(-i)$
$\varphi(i.i)= \varphi(-1)=2$ dan $\varphi(i)+\varphi(i)=3+3=2$, sehingga $\varphi(i.i)= \varphi(i)+ \varphi(i)$
$\varphi(i. -i)= \varphi(1)=0$ dan $\varphi(i)+\varphi(-i)=3+1=0$, sehingga $\varphi(i. -i)= \varphi(i)+ \varphi(-i)$
$\varphi(-i. -i)= \varphi(-1)=2$ dan $\varphi(-i)+\varphi(-i)=1+1=2$, sehingga $\varphi(-i. -i)= \varphi(-i)+ \varphi(-i)$

Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_4 merupakan homomorfisma grup.

5. Untuk R_5

$\varphi(-1.i)= \varphi(-i)=0$ dan $\varphi(-1)+\varphi(i)=2+0=2$, sehingga $\varphi(-1.i) \neq \varphi(-1)+ \varphi(i)$

Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_5 bukan merupakan homomorfisma grup.

6. Untuk R_6

   φ(-1.i)= φ(-i)=2 dan φ(-1)+φ(i)=2+2=0, sehingga φ(-1.i) $\neq$ φ(-1)+ φ(i)

   Ini berarti fungsi φ dengan pemasangan seperti R_6 bukan merupakan homomorfisma grup.

2. Kesimpulan

Dari pembentukan fungsi dari grup berhingga (A,.) ke grup berhingga (Z_4,+) diperoleh 256 fungsi. Dari 256 fungsi tersebut yang ditengarai merupakan homomorfisma (sesuai teorema 3) sebanyak 6 fungsi. Setelah dilakukan pengecekan terhadap 6 fungsi tersebut, ternyata hanya 4 fungsi yang merupakan homomorfisma grup.

Daftar Pustaka

1. Adkins, William A.,and Weintraub Steven H., 1992., Graduate in Mathematics : Algebra an Approach Via Module Theory, Springer-Verlag New York,Inc
2. Birkhoff, G. and Mclane, S. 1965. A Survey of Modern Algebra. New York: The Mcmilan Company
3. Durbin, JR. 1992. Modern Algebra : An Introduction. New York : John Wiley&Sons
4. Fraleigh, J.B.1989. A First Course in Abstract Algebra. New York: Addison-Wesley Publishing Company
5. Herstein, I.N. 1975. Topics in Algebra. New York : John Wiley&Sons
6. Hungerford, 1974. Algebra. New York: Springer-Verlag
7. Wahyudin, 1989, Aljabar Modern, Tarsito - Bandung
8. Yaya S. Kusumah, 1986, Logika Matematika Elementer, Tarsito – Bandung