

---

## PENGENDALIAN CHAOS MENGGUNAKAN SLIDING MODE CONTROL (SMC) PADA SISTEM PERSAMAAN RÖSSLER YANG TERMODIFIKASI

Muhammad Hajarul Aswad<sup>1</sup>, Moh. Isa Irawan<sup>2</sup>, Mardlijah<sup>3</sup>

Staf Pengajar MAN 1 Kendari<sup>1</sup>, Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh  
Nopember Surabaya<sup>2,3</sup>

Kampus ITS, Sukolilo - Surabaya 60111

as\_wad82@yahoo.co.id<sup>1</sup>, mii@its.ac.id<sup>2</sup>, mardlijah@matematika.its.ac.id<sup>3</sup>

### Abstrak

*Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem persamaan yang berkaitan dengan kinetika kimia. Pada sistem tersebut akan terjadi osilasi secara terus menerus menurut waktu  $t$ . Dalam penelitian ini, terlebih dahulu dianalisa stabilitas yang terjadi di sekitar titik setimbang. Kemudian, dengan menggunakan rata-rata Lyapunov exponent, diperoleh bahwa Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu system yang bersifat chaos. Terakhir, diterapkan Sliding Mode Control (SMC) untuk mengontrol perilaku sistem. Dari hal tersebut perilaku sistem yang awalnya tidak stabil dan bersifat chaos dapat diarahkan menuju titik setimbang.*

**Kata kunci :** *Sistem Persamaan Rössler, Chaos, Sliding Mode Control (SMC).*

### Abstract

*Rosler Equation System is a system of modified equations associated with the chemical kinetics. In such a system will be oscillating continuously by time  $t$ . In this study, first analyzed the stability that occurs around the point of equilibrium. Then, using the average Lyapunov exponent, found that a modified Rosler Equation System is a system that is chaotic. Finally, applied to Sliding Mode Control (SMC) to control the behavior of the system. From this behavior of a system that is unstable and chaotic nature can be directed toward the equilibrium.*

**Keywords:** *Rosler Equation System, Chaos, Sliding Mode Control (SMC).*

### 1. Pendahuluan

Sistem Persamaan Rössler pertamakali diperkenalkan oleh Otto Rössler pada tahun 1970-an sebagai suatu sistem persamaan yang berkaitan dengan laju perubahan konsentrasi dari reaktan atau produk dari suatu reaksi kimia. Karena reaksinya yang kompleks, maka dimungkinkan Sistem Persamaan Rössler tersebut akan bersifat chaos (Gaspard, 2005).

Chaos merupakan suatu fenomena sistem yang tidak teratur yang disebabkan oleh sensitifitas sistem terhadap kondisi awal. Salah satu metode yang digunakan untuk menjelaskan suatu sistem berperilaku chaos atau tidak, adalah dengan menggunakan *Lyapunov exponent*. Hilborn (1993) mendefinisikan suatu sistem bersifat chaos apabila dalam sistem tersebut terdapat satu *Lyapunov exponent* yang bernilai positif.

Beberapa metode yang telah digunakan untuk mengontrol chaos diantaranya OGY, *differential geometry*, *adaptive control*, *inverse optimal control*, dan *adaptive fuzzy control* (Dadras dkk, 2008)

*Sliding Mode Control* (SMC) merupakan salah satu metode pengendalian yang bersifat *robust* sehingga mampu bekerja pada sistem linear maupun nonlinier yang memiliki ketidakpastian. Pendekatan SMC telah efektif diaplikasikan untuk mengontrol sistem nonlinier (Nazzal dkk, 2007) dan sistem dengan ketidakaturan (Feki, 2008).

Dalam Nikolov (2006) telah diteliti transisi hyperchaos-chaos-hyperchaos yang terjadi pada Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi. Transisi tersebut dikarenakan adanya perubahan parameter bifurkasi yang berdampak pada perubahan tipe titik setimbang. Sistem Persamaan Rössler dibuat menjadi 8 sistem dengan memodifikasi parameter  $b$  menjadi  $b + b_1x + b_2y + b_3z + b_4w$  kemudian menambahkan sebuah persamaan linear  $\dot{w}$ . Pada sistem yang ke-8 (dengan parameter  $a = 0.25$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.05$ ,  $b_1 \in [0.01, 1.5]$ ,  $b_2 = -0.1$ ,  $b_3 = b_4 = 0.1$ ), perubahan perilaku dari hyperchaos-chaos terjadi pada saat  $b_1 = 0.3$  dan  $b_1 = 0.4$ . Setelah itu terjadi perubahan perilaku chaos-hyperchaos pada saat  $b_1 = 0.6$ . lebih lanjut dikatakan bahwa, sistem yang ke-8 memiliki perilaku yang lebih chaos dibandingkan ketujuh sistem lainnya.

Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana penerapan *Sliding Mode Control* (SMC) dalam mengontrol chaos yang terjadi pada Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi.

## 2. Kestabilan Sistem di Sekitar Titik Setimbang

Definisi 1

Suatu titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  dikatakan sebagai suatu titik setimbang dari  $\dot{x} = f(x)$  jika  $f(\bar{x}) = 0$ . □

Adapun Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi yang dimaksud dalam penelitian ini adalah

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay + w \\ \dot{z} &= b + b_1x + b_2y + b_3z + b_4w + xz \\ \dot{w} &= -cz + dw \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan  $a = 0.25$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.05$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = -0.1$ ,  $b_3 = b_4 = 0.1$ .

Berdasarkan Definisi 1, diperoleh titik setimbang dari Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi sebagai berikut

$$e_1 = \begin{pmatrix} \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right), \\ - \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right), \\ \frac{-A + \sqrt{D}}{2}, \\ \frac{c}{d} \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} \left(a - \frac{c}{d}\right) \left(\frac{-A - \sqrt{D}}{2}\right), \\ -\left(\frac{-A - \sqrt{D}}{2}\right), \\ \frac{-A - \sqrt{D}}{2}, \\ \frac{c}{d} \left(\frac{-A - \sqrt{D}}{2}\right) \end{pmatrix},$$

dengan

$$A = \left(\frac{b_1(ad - c) - b_2d + b_3d + b_4c}{ad - c}\right)$$

dan

$$D = \left(\frac{b_1(ad - c) - b_2d + b_3d + b_4c}{ad - c}\right)^2 - 4 \frac{bd}{ad - c}.$$

Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem persamaan yang nonlinear, sehingga perlu diterapkan linearisasi di sekitar titik setimbang (Phillips, 1996). Metode ini menghasilkan suatu matriks Jacobian yang merupakan interpretasi dari sistem nonlinear yang telah dilinearisasi. Akibat dari Linearisasi tersebut, maka kestabilan system akan bersifat local (Ogata, 1985).

Misalkan titik setimbang  $e_1$  dan  $e_2$  disimbolkan sebagai  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ , maka linearisasi Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi di sekitar titik setimbang  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$  adalah

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + z & b_2 & b_3 + x & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Jadi, matriks Jacobian pada titik setimbang  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + \bar{z} & b_2 & b_3 + \bar{x} & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix}_{(x=\bar{x}, y=\bar{y}, z=\bar{z}, w=\bar{w})}$$

Setelah dilinearisasi sehingga diperoleh matriks Jacobiannya, maka selanjutnya dianalisa kestabilan Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi di sekitar titik setimbang

### 2.1 Analisa Sistem di Sekitar Titik Setimbang Pertama ( $e_1$ )

Hasil linearisasi sistem di sekitar titik setimbang  $e_1$  adalah

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + \left(\frac{-A + \sqrt{D}}{2}\right) & b_2 & b_3 + \left(\frac{a - \frac{c}{d}}{2}\right) & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian pada titik setimbang  $e_1$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + \left(\frac{-A + \sqrt{D}}{2}\right) & b_2 & b_3 + \left(\frac{a - \frac{c}{d}}{2}\right) & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan  $|\lambda I - J| = 0$ , maka polynomial akar-akar karakteristiknya adalah

$$\lambda^4 + \left( \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) - d - b_2 - a \right) \lambda^3 + \left( b_2 d - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + b_4 c + a \left( d + b_2 - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) + 1 + \left( b_2 - \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \lambda^2 + \left( b_2 c - a \left( b_2 d - \left( \left( \frac{a - c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + b_4 c \right) - \left( d + b_2 - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) + \left( b_2 - b_2 d + \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) d - ab_2 + a \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \lambda + \left( b_2 d - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + b_4 c - b_2 c + \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) c + \left( ab_2 d - a \left( \frac{A - \sqrt{D}}{2} \right) d - b_2 d \right) \right) = 0 \quad (2.3)$$

Karena tanda bilangan real dari Persamaan (2.3) tidak mudah untuk ditentukan, maka kestabilan sistem di sekitar titik setimbang pertama ( $e_1$ ) akan diinterpretasi menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Misalkan Persamaan (2.3) ditulis dalam bentuk berikut

$$p(s) = a_{41}s^4 + a_{31}s^3 + a_{21}s^2 + a_{11}s + a_{01} \quad (2.4)$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_1$  dikatakan stabil jika tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama dalam tabel Routh (Subiono, 2008)

Karena  $a_{41} > 0$ , maka

$$a_{31} > 0$$

$$b_{11} = \frac{a_{31}a_{21} - a_{41}a_{11}}{a_{31}} > 0$$

$$c_{11} = \frac{b_{11}a_{11} - b_{21}a_{31}}{b_{11}} > 0$$

dan

$$d_{11} = \frac{c_{11}b_{21} - b_{11}c_{21}}{c_{11}} > 0.$$

Dengan menurunkan peridaksamaan di atas, maka perilaku sistem di sekitar titik setimbang pertama ( $e_1$ ) dikatakan stabil jika memenuhi keadaan berikut

1.  $a_{31} > 0$  (2.5)
2.  $a_{31}a_{21} - a_{41}a_{11} > 0$  (2.6)
3.  $a_{11}(a_{21}a_{31} - a_{11}a_{41}) > a_{01}a_{31}a_{31}$  (2.7)
4.  $a_{01} > 0$  (2.8)
5.  $a_{11} > 0$  (2.9)

## 2.2 Analisa Sistem di Sekitar Titik Setimbang Kedua ( $e_2$ )

Linearisasi sistem di sekitar titik setimbang  $e_2$  adalah

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + \left(\frac{-A-\sqrt{D}}{2}\right) & b_2 & b_3 + \left(\frac{a-\frac{c}{d}}{\left(\frac{-A-\sqrt{D}}{2}\right)}\right) & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks Jacobian pada titik setimbang  $e_2$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ b_1 + \left(\frac{-A-\sqrt{D}}{2}\right) & b_2 & b_3 + \left(\frac{a-\frac{c}{d}}{\left(\frac{-A-\sqrt{D}}{2}\right)}\right) & b_4 \\ 0 & 0 & -c & d \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan  $|\lambda I - J| = 0$ , maka polynomial akar-akar karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left( \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) - d - b_2 - a \right) \lambda^3 + \\ & \left( b_2 d - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + b_4 c + \right. \\ & \left. a \left( d + b_2 - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \right) \lambda^2 + \\ & \left. 1 + \left( b_2 - \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \\ & \left( b_2 c - a \left( b_2 d - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + b_4 c \right) - \right. \\ & \left. \left( d + b_2 - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \right) \lambda + \\ & \left. \left( b_2 - b_2 d + \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) d - \right. \right. \\ & \left. \left. a b_2 + a \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) \right) \\ & \left( b_2 d - \left( \left( a - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) \right) d + \right. \\ & \left. b_4 c - b_2 c + \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) c + \right. \\ & \left. \left( a b_2 d - a \left( \frac{A + \sqrt{D}}{2} \right) d - b_2 d \right) \right) = 0 \quad (2.10) \end{aligned}$$

Misalkan Polinomial (2.10) ditulis dalam bentuk berikut

$$p(s) = a_{42}s^4 + a_{32}s^3 + a_{22}s^2 + a_{12}s + a_{02} \quad (2.11)$$

Karena  $a_{42} > 0$ , maka

$$a_{32} > 0$$

$$b_{12} = \frac{a_{32}a_{22} - a_{42}a_{12}}{a_{32}} > 0,$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}a_{12} - b_{22}a_{32}}{b_{12}} > 0,$$

dan

$$d_{12} = \frac{c_{12}b_{22} - b_{12}c_{22}}{c_{12}} > 0.$$

Dengan menurunkan pertidaksamaan tersebut di atas,, maka perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_2$  dikatakan stabil jika memenuhi keadaan berikut yaitu

1.  $a_{32} > 0$  (2.12)

2.  $a_{32}a_{22} - a_{42}a_{12} > 0$  (2.13)

3.  $a_{12}(a_{22}a_{32} - a_{12}a_{42}) > a_{02}a_{32}a_{32}$  (2.14)

4.  $a_{02} > 0$  (2.15)

5.  $a_{12} > 0$  (2.16)

### 3. Existensi Chaos

Chaos pada Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi dihitung dengan menggunakan *Lyapunov exponent*. Untuk sistem dua dimensi atau lebih, maka existensi chaos diperoleh dengan menghitung rata-rata *Lyapunov exponent* pada sistem tersebut. Suatu sistem bersifat chaos jika pada sistem tersebut terdapat paling sedikit satu rata-rata *Lyapunov exponent* (Hilborn, 1993).

Rata-rata *Lyapunov exponent* di sekitar titik setimbang  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$  adalah

$$\begin{aligned} L &= \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{4} \\ &= \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial f(w)}{\partial w}}{4} \\ &= \frac{a + b_3 + \bar{x} + d}{4} \end{aligned} \quad (3.1)$$

### 4. Sliding Mode Control

*Sliding Mode Control* (SMC) merupakan salah satu metode pengontrol sistem yang memiliki performa yang baik dalam mengontrol system linear maupun nonlinear. Perancangan *Control law* pada SMC bertujuan untuk mengeliminasi perilaku sistem yang tidak stabil sehingga konvergen ke titik setimbang.

$$u = u_{eq} - K \text{ sign } S \quad (4.1)$$

dengan

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x < 1 \\ 1 & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

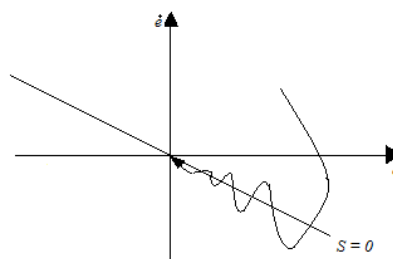
Pada proses SMC, terlebih dahulu ditentukan *sliding surface* yang melalui titik setimbang.

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) \quad (4.2)$$

dengan

$$e(t) = x(t) - x^d(t) \quad (4.3)$$

Kemudian, dirancang pengontrol  $u$  sehingga mampu mengarahkan *state system* ke *sliding surface* dan terus berada pada posisi *sliding* hingga menuju ke titik setimbang. Selanjutnya, dengan menggunakan konsep kestabilan *Lyapunov* akan ditemukan  $K$  sehingga memenuhi *reaching condition* (Palm, 1996).



Gambar 4.1 Kondisi Sliding

### 5. Interpretasi Numerik

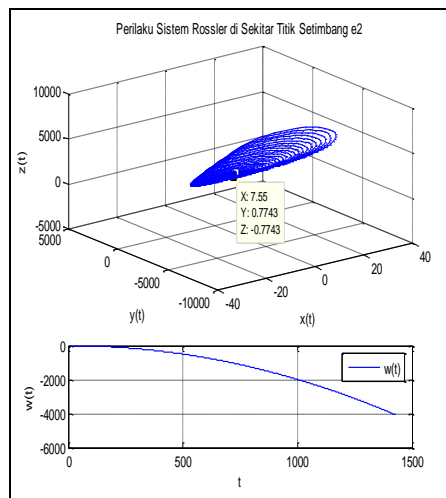
Telah ditunjukkan bahwa Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi sebagaimana yang terlihat pada Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem dengan dua titik setimbang. Selain itu, berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, telah diperoleh analisa kestabilan sistem di sekitar titik setimbang tersebut. Selanjutnya akan diperoleh interpretasi numerik dengan mensubstitusi parameter sistem.

Dengan mensubstitusi parameter sistem  $a = 0.25$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.05$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = -0.1$ ,  $b_3 = b_4 = 0.1$  ke dalam  $e_1$ , maka diperoleh  $e_1 = (-3.8745, -0.3974, 0.3974, 3.9738)$ . Dari hasil perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh bahwa nilai  $a_{01} = -0.5712$ ,  $a_{11} = 3.3399$ ,  $a_{21} = 0.8276$ ,  $a_{31} = 3.4745$ , dan  $a_{41} = 1$ . Sehingga diperoleh  $a_{31} = 3.4745$ ;  $a_{31}a_{21} - a_{41}a_{11} = -0.4647$ ;  $a_{11}(a_{21}a_{31} - a_{11}a_{41}) = -1.5519$ ;  $a_{01}a_{31}a_{31} = -6.8954$ ;  $a_{01} = -0.5712$ ;  $a_{11} = 3.3399$ .

Berdasarkan hasil tersebut, terlihat bahwa  $a_{31}a_{21} - a_{41}a_{11} \neq 0$ , dan  $a_{01} \neq 0$ . Jadi perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_1$  tidak stabil.

Dengan cara yang sama diperoleh  $e_2 = (7.5495, 0.7743, -0.7743, -7.7430)$ , dan berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai  $a_{02} = 0.5712$ ,  $a_{12} = -7.8753$ ,  $a_{22} = 3.0830$ ,  $a_{32} = -7.9495$ , dan  $a_{42} = 1$  sehingga  $a_{32} = -7.4495$ ;  $a_{32}a_{22} - a_{42}a_{12} = -16.6331$ ;  $a_{12}(a_{22}a_{32} - a_{12}a_{42}) = 130.9907$ ;  $a_{02}a_{32}a_{32} = 36.0960$ ;  $a_{02} = 0.5712$ ;  $a_{12} = -7.8753$ .

Berdasarkan hasil tersebut, terlihat bahwa  $a_{32} \neq 0$ ,  $a_{32}a_{22} - a_{42}a_{12} \neq 0$ , dan  $a_{12} \neq 0$ . Jadi, perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_2$  tidak stabil.



Gambar 5.1 Perilaku sistem di sekitar titik setimbang kedua ( $e_2$ ) sebelum diberikan pengontrol  $u$

Perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_1$  dan  $e_2$  tidak stabil dengan *trajectory* sistem yang terus bergerak menjauhi titik setimbang. Masing-masing *species* memiliki laju yang lambat dengan konsentrasi yang terus berubah menurut waktu  $t$ . Molekul dari masing-masing *species* memiliki energi aktivasi yang terlalu tinggi sehingga kemungkinan terbentuknya produk sangat kecil.

Karena perilaku sistem di sekitar titik setimbang  $e_1 = (-3.8745, -0.3974, 0.3974, 3.9738)$  dan titik setimbang  $e_2 = (7.5495, 0.7743, -0.7743, -7.7430)$  tidak stabil, maka

dapat dikatakan bahwa Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem yang tidak stabil.

Dengan menggunakan Persamaan (3.1), diperoleh rata-rata *Lyapunov exponent* - 0.8686 pada titik setimbang  $e_1$  dan 1.9874 pada titik setimbang  $e_2$ . Karena terdapat satu rata-rata *Lyapunov exponent* yang bernilai positif, maka Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem persamaan yang bersifat chaos.

Suatu *input control* diletakkan pada masing-masing state dari Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi, sehingga diperoleh suatu sistem persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z + u_1 \\ \dot{y} &= x + ay + w + u_2 \\ \dot{z} &= b + b_1x + b_2y + b_3z + b_4w + \\ &\quad xz + u_3 \\ \dot{w} &= -cz + dw + u_4\end{aligned}\quad (5.1)$$

Misalkan suatu titik setimbang sebagai  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ . Karena  $e(t) = x(t) - x^d(t)$ , dengan  $x^d(t)$  adalah *state* yang diinginkan, maka diperoleh eror dinamik dari Sistem Persamaan (5.1)

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= -E_2 - E_3 + u_1 \\ \dot{E}_2 &= E_1 + aE_2 + E_4 + u_2 \\ \dot{E}_3 &= E_1E_3 + E_1\bar{z} + \bar{x}E_3 + \\ &\quad b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3 + \\ &\quad b_4E_4 + \mathbb{R} + u_3 \\ \dot{E}_4 &= -cE_3 + dE_4 + u_4\end{aligned}\quad (5.2)$$

dengan  $\mathbb{R} = b + b_1\bar{x} + b_2\bar{y} + b_3\bar{z} + b_4\bar{w} + \bar{x}\bar{z}$

Selanjutnya, akan diturunkan aturan pengontrol  $u$  untuk masing-masing state.

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= -E_2 - E_3 + u_1 \\ \text{sliding surface untuk } n = 1 &\text{ adalah} \\ S &= E_1(t)\end{aligned}\quad (5.3)$$

Berdasarkan (5.3), maka

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \dot{E}_1(t) = -E_2 - E_3 + u_1 \\ \text{Untuk } \dot{S} &= 0, \text{ maka} \\ \hat{u} &= u_{eq} = E_2 + E_3\end{aligned}\quad (5.4)$$

Sehingga aturan pengontrolan  $u$  berdasarkan *control law* adalah

$$u_1 = (-E_1 - aE_2 - E_4) - K \text{ sign}(S)\quad (5.5)$$

*Reaching condition* terpenuhi jika

$$\dot{S} \cdot \text{sign}(S) \leq -\eta, \quad \text{dengan } \eta > 0$$

Sehingga

$$(-K \text{ sign}(S)) \text{ sign}(S) \leq -\eta$$

$$-K \leq -\eta$$

$$K \geq \eta$$

Artinya,  $K > 0$

Jadi, aturan pengontrol  $u$  untuk state pertama adalah

$$u_1 = y + z - (\bar{y} + \bar{z}) - K \text{ sign}(x - \bar{x})\quad (5.6)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$u_2 = -x - ay - w + (\bar{x} + a\bar{y} + \bar{w})$$

$$-K \text{ sign}(y - \bar{y})$$

$$u_3 = \left( \begin{array}{l} -xz - b_1x - \\ b_2y - b_3z - b_4w - b \end{array} \right) -$$

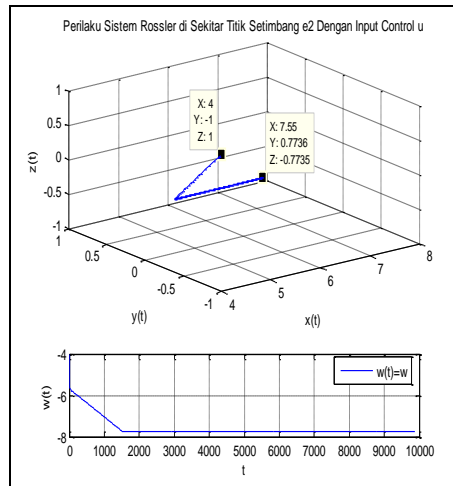
$$K \text{ sign}(z - \bar{z})$$

$$u_4 = (cz - dw - (c\bar{z} - d\bar{w})) -$$



$$K \operatorname{sign}(w - \bar{w})$$

Setelah diberi *pengontrol*  $u$ , perilaku sistem di sekitar titik setimbang tampak berubah. *Trajectory system* yang awalnya membentuk osilasi, mampu menuju *sliding surface* dan bergerak menuju ke titik setimbang. Pada saat yang berlainan, konsentrasi masing-masing *species* tidak lagi mengalami perubahan yang mengindikasikan bahwa perlakuan yang diberikan terhadap reaksi mampu menurunkan energi aktivasi. Reaksi berlangsung semakin cepat sehingga dapat membentuk produk. Perhatikan Gambar 5.2 berikut



Gambar 5.2 Perilaku sistem di sekitar titik setimbang kedua ( $e_2$ ) setelah diberi pengontrol  $u$  dengan nilai awal (4, -1, 1, -4)

Jika dilakukan *smoothing* dengan cara mengganti fungsi signum  $\operatorname{sign}(S)$  pada *control input*  $u$  dengan fungsi saturasi  $\operatorname{sat}(S/\Phi)$ , maka Persamaan (5.6) menjadi

$$u_1 = y + z - (\bar{y} + \bar{z}) - K \left( \frac{x - \bar{x}}{\Phi} \right) \quad (5.7)$$

$$\text{dengan } \operatorname{sat} \left( \frac{S}{\Phi} \right) = \begin{cases} \frac{S}{\Phi} & \text{jika } \left| \frac{S}{\Phi} \right| < 1 \\ \operatorname{sign} \left( \frac{S}{\Phi} \right) & \text{jika } \left| \frac{S}{\Phi} \right| \geq 1 \end{cases}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

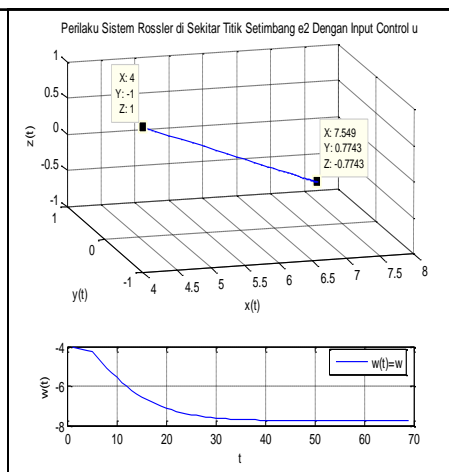
$$u_2 = -x - ay - w + (\bar{x} + a\bar{y} + \bar{w})$$

$$-K \left( \frac{y - \bar{y}}{\Phi} \right)$$

$$u_3 = \left( \begin{array}{c} -xz - b_1x - \\ b_2y - b_3z - b_4w - b \end{array} \right) - K \left( \frac{z - \bar{z}}{\Phi} \right)$$

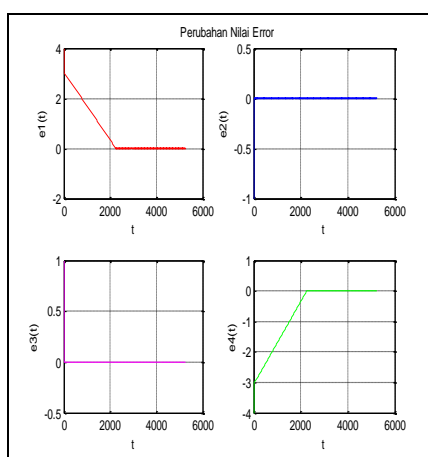
$$u_4 = (cz - dw - (c\bar{z} - d\bar{w})) - K \left( \frac{w - \bar{w}}{\Phi} \right)$$

## Pengendalian Chaos Menggunakan Sliding Mode Control (SMC) Pada Sistem Persamaan Rossler Yang Termodifikasi



Gambar 5.3 Perilaku sistem di sekitar titik setimbang kedua ( $e_2$ ) setelah diberi pengontrol  $u$  dengan cara *smoothing*. (Nilai awal = (4, -1, 1, -4),  $K = 3$ , dan  $\Phi = 2$ )

Selanjutnya, perubahan nilai error akibat *input control*  $u$  dapat dilihat pada Gambar 5.4 berikut



Gambar 5.4 Perubahan nilai error setelah diberi pengontrol  $u$  untuk sistem di sekitar titik setimbang kedua ( $e_2$ )

### 6. Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa

1. Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi merupakan suatu sistem yang memiliki dua titik setimbang *hyperbolic* yaitu  $e_1 = \left( \left( \alpha - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right), - \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right), \frac{-A + \sqrt{D}}{2}, \frac{c}{d} \left( \frac{-A + \sqrt{D}}{2} \right) \right)$  dengan tipe *saddle point*, dan  $e_2 = \left( \left( \alpha - \frac{c}{d} \right) \left( \frac{-A - \sqrt{D}}{2} \right), - \left( \frac{-A - \sqrt{D}}{2} \right), \frac{-A - \sqrt{D}}{2}, \frac{c}{d} \left( \frac{-A - \sqrt{D}}{2} \right) \right)$  dengan tipe *sources*.
2. Kriteria kestabilan Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi diperoleh dengan menggunakan konsep kestabilan Routh-Hurwitz. Perilaku sistem di

---

sekitar titik setimbang pertama stabil jika memenuhi Pertidaksamaan (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), dan (2.9) sedangkan perilaku sistem di sekitar titik setimbang kedua stabil jika memenuhi Pertidaksamaan (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), dan (2.16).

3. Rata-rata *Lyapunov exponent* di sekitar titik setimbang adalah

$$L = \frac{a + b_3 + \bar{x} + d}{4}$$

4. Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi dengan parameter sistem  $a = 0.25$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0.5$ ,  $d = 0.05$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = -0.1$ ,  $b_3 = b_4 = 0.1$  merupakan suatu sistem persamaan yang tidak stabil dan bersifat chaos.
5. *Sliding Mode Control* (SMC) merupakan suatu metode pengontrol yang mampu mengontrol chaos yang terjadi pada Sistem Persamaan Rössler yang termodifikasi. Aturan kontrol yang bekerja pada SMC, mampu mengarahkan sistem menuju ke titik setimbang untuk sebarang *initial condition*. Fenomena *chattering* yang timbul sebagai akibat dari model pengontrolan yang diskontinu pada SMC murni dapat diminimalkan dengan *smoothing* yaitu dengan menempatkan suatu *boundary layer* di sekitar *sliding surface* sehingga *trajectory system* hanya akan bergerak di dalam *boundary layer* lalu menuju ke titik setimbang.

## 7. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengkombinasikan antara SMC murni dengan metode pengontrol sistem yang lain sehingga *sliding surface* dapat langsung diperoleh tanpa harus mereduksi sistem.

## Daftar Pustaka

1. Chang, Raymond, 2002, *Chemistry: Seventh Edition*, Boston, McGraw-Hill.
2. Dadras dkk, Sara., dkk., 2008, *Sliding Mode Control for Uncertain New Chaotic Dynamical System*, Chaos, Solitons and fractals.
3. Feki, Moez., 2008, *Sliding Mode Control and Synchronization of Chaotic Systems With Parametric Uncertainties*, Chaos, Solitons and Fractals.
4. Gaspard, Pierre, 2005. "Rössler Sistem" dalam *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. Scott, Alwyn., Routledge, New York, hal. 808-811.
5. Hilborn, Robert C., 1993, *Chaos and Nonlinear Dynamics :An Introduction For Scientists and Engineers*, Oxford University Press, Inc., New York.
6. Nazzal, Jamal M., dan Natshes, Ammar N., 2007, *Chaos Control using Sliding-Mode Theory*, Chaos, Solitons and Fractals, No. 33, hal. 695–702.
7. Nikolov, Svetoslav., dan Clodong, Sébastien., 2006, *Hyperchaos–Chaos–Hyperchaos Transition in Modified Rössler Systems*, Chaos, Solitons and Fractals, No. 28, hal. 252–263.
8. Ogata, Katsuhiko, 1985, *Teknik Kontrol Automatik: Sistem Pengaturan Jilid 2*, Penerbit Erlangga, Jakarta.
9. Palm, Rainer., dkk., 1996, *Model Based Fuzzy Control: Fuzzy Gain Schedulers and Sliding Mode Fuzzy Control*, Springer-Verlag, New York.
10. Phillips, Charles L., dan Harbor, Royce D., 1996, *Feedback Control Systems :Third Edition*, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
11. Subiono, 2008, *Matematika Sistem (Diktat)*, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.