KAJIAN KONVERGENSI BARISAN RUANG NORM-(n-1) DENGAN $n \geq 2$

Faridatul Masruroh[1], Erna Apriliani[2], Sadjidon[3]
Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya[1,2,3]
Jl. Arief Rahman Hakim, Kampus Keputih – Sukolilo, Surabaya 60111 – Jawa Timur
sinus_girl@yahoo.co.id[1], april@matematika.its.ac.id[2]

Abstrak

Penjelasan mengenai ruang norm telah banyak dikaji oleh para matematikawan. Baik kajian dalam ruang norm, ruang norm-2, dan ruang norm-n. Kajian tentang ortogonalitas dalam ruang norm diilhami oleh Ruang hasil kali dalam. Definisi ortogonalitas dalam ruang norm juga telah banyak dikembangkan oleh para matematikawan. Pada paper ini, dengan menggunakan aspek ortogonalitas dijelaskan bahwa jika terdefinisi suatu ruang norm-n maka ruang norm-(n-1) terdefinisi dengan n ≥ 2. Berikutnya dikaji konvergensi barisan ruang norm-(n-1).

Kata kunci: *Ortogonalitas, Ruang norm-n, Ruang norm-(n-1)*

Abstract

A description of the space norm has been widely studied by mathematicians. Both studies within the norm, a norm-2, and a norm-n. Studies on orthogonality in space norm is inspired by the inner product space. The definition of orthogonality in space norm also been developed by mathematicians. In this paper, by using the orthogonality aspects explained that when defining a space of norm-n the space norm-(n-1) defined by n ≥ 2. Next examined convergence sequence space norm-(n-1).

Keywords: *Orthogonality, norm-n Space, Space norm-(n-1).*

1. Pendahuluan

Penjelasan mengenai ruang norm telah banyak dikaji oleh para matematikawan. Baik kajian dalam ruang norm, ruang norm-2, dan ruang norm-*n*. Kajian tentang ortogonalitas dalam ruang norm diilhami oleh Ruang hasil kali dalam. Definisi ortogonalitas dalam ruang norm juga telah banyak dikembangkan oleh para matematikawan. Beberapa definisi ortogonalitas yang dikutip dari Kikianty (2008) diantaranya adalah Definisi Ortogonalitas Pythagoras, Isosceles dan Birkhoff-James. Misal $(X, \|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ adalah ruang norm-*n* dengan dimensi $(n + 1)$ atau lebih.

1. Pythagoras-ortogonalitas: x dikatakan P-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_P y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
$$\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_n\|^2;\ \forall x_2,\cdots,x_n \in V.$$
2. Isosceles-ortogonalitas: x dikatakan I-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_I y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
$$\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2 = \|x-y,x_2,\cdots,x_n\|^2;\ \forall x_2,\cdots,x_n \in V.$$

3. Birkhoff-James-ortogonalitas: x dikatakan BJ-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_{BJ} y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
   $\|x+\alpha y, x_2, \cdots, x_n\| \geq \|x, x_2, \cdots, x_n\|$; $\forall x_2, \cdots, x_n \in V$ dan $\alpha \in$ R .

   Misal $(X, \langle \cdot,\cdot|\cdot,\cdots,\cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam-n. untuk setiap $x, y \in X$,

maka x adalah G-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_G y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga $\langle x, y | x_2, \cdots, x_n \rangle = 0$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in V$. (Gunawan, 2006)

Pada paper ini, dengan menggunakan aspek ortogonalitas akan dijelaskan bahwa jika terdefinisi suatu ruang norm-n maka harus terdefinisi terlebih dahulu ruang norm-(n-1) dengan $n \geq 2$. Berikutnya akan dikaji konvergensi barisan dan lengkap pada ruang norm-n dan ruang norm-(n-1).

2. Pembahasan

2.1 Ruang Norm-*n*

Definisi 2.1a Misal X adalah ruang linear real dengan dim $X \geq n$ dan suatu fungsi $\|\cdot,\cdots,\cdot\| : X^n \to$ R, maka $(X, \|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ disebut ruang norm-n linear jika

(nN-1) $\|x_1, \cdots, x_n\| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \cdots, x_n$ bergantung linier;

(nN-2) $\|x_1, \cdots, x_n\| = \|x_{j_1}, \cdots, x_{j_n}\|$ untuk setiap permutasi $(j_1, \cdots, j_n)$dari $(1, \cdots, n)$;

(nN 3) $\|\alpha x_1, \cdots, x_n\| = |\alpha| \|x_1, \cdots, x_n\|$;

(nN-4) $\|x+y, x_2, \cdots, x_n\| \leq \|x, x_2, \cdots, x_n\| + \|y, x_2, \cdots, x_n\|$ $\forall \alpha \in$ R dan $x, y, x_1, \cdots, x_n \in X$.

Fungsi $\|\cdot,\cdots,\cdot\|$disebut norm-n pada X. (Chu, dkk, 2008)

Definisi 2.1b Misal $(X, \|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ adalah ruang norm-n dengan dimensi (n + 1) atau lebih, maka

1. Pythagoras-ortogonalitas:
   x dikatakan P-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_P y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
   $\|x+y, x_2, \cdots, x_n\|^2 = \|x, x_2, \cdots, x_n\|^2 + \|y, x_2, \cdots, x_n\|^2$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in V$.
2. Isosceles-ortogonalitas:
   x dikatakan I-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_I y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
   $\|x+y, x_2, \cdots, x_n\|^2 = \|x-y, x_2, \cdots, x_n\|^2$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in V$.
3. Birkhoff-James-ortogonalitas:
   x dikatakan BJ-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_{BJ} y$) jika dan hanya jika ada subruang V di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga
   $\|x+\alpha y, x_2, \cdots, x_n\| \geq \|x, x_2, \cdots, x_n\|$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in V$ dan $\alpha \in$R.(Chu, dkk, 2008)

Definisi 2.1c Misal $(X, \langle \cdot,\cdot|\cdot,\cdots,\cdot \rangle)$ adalah ruang hasil kali dalam-n. berdimensi $n+1$ atau lebih. Untuk $x, y \in X$, maka x adalah G-ortogonalitas terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_G y$) jika dan hanya jika ada suatu subruang V

di X dengan codim(V) = 1 sedemikian hingga $\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = 0$, untuk setiap $x_2,\cdots,x_n \in V$. (Gunawan, 2006)

2.2 Ortogonalitas di Ruang Norm-*n* dan Ruang Norm-(*n*-1)

Pada bagian ini akan dijelaskan bahwa dengan $n \geq 2$ jika suatu ruang norm-*n* terdefinisi maka ruang norm-(*n*-1) terdefinisi dengan meninjau dari aspek ortogonalitas Pythagoras, Isosceles, Birkhoff-James, dan Gunawan. maksudnya jika terdefinisi x dan y ortogonal di norm-*n* maka x dan y ortogonal di norm-(*n*-1) terdefinisi.

Teorema 2.2 Jika x dan y ortogonal di norm-*n* maka ortogonal di norm-(*n*-1), dengan *x* dan *y* ortogonal terhadap $\forall x_2,\cdots,x_n$ dan $n \geq 2$.

Bukti:

Diketahui :

❖ *x* dan *y* ortogonal di norm-*n* artinya

1. Ortogonalitas_ Pythagoras:
   $\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_n\|^2$, $\forall x_2,\cdots,x_n \neq 0$.
2. Ortogonalitas_ Isosceles:
   $\|x+y,x_2,\cdots,x_n\| = \|x-y,x_2,\cdots,x_n\|$, $\forall x_2,\cdots,x_n \neq 0$.
3. Ortogonalitas_ Birkhoff-James:
   $\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_n\| \geq \|x,x_2,\cdots,x_n\|$, $\forall x_2,\cdots,x_n \neq 0$ dan $\forall \alpha \in$ R.
4. Ortogonalitas_ Gunawan:
   $\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = 0$, $\forall x_2,\cdots,x_n \neq 0$.

❖ x dan y ortogonal terhadap $\forall x_2,\cdots,x_n$ artinya $\langle x,x_2|x_3,\cdots,x_n\rangle = 0$ dan $\langle y,x_2|x_3,\cdots,x_n\rangle = 0$ maka berakibat $\langle x+y,x_2\,|\,x_3,\cdots,x_n\rangle = 0$ dan $\langle x-y,x_2\,|\,x_3,\cdots,x_n\rangle = 0$.

Akan ditunjukkan *x* dan *y* ortogonal di norm-1 artinya:

1. Ortogonalitas_ Pythagoras:
   $\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2$, $\forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0$.
2. Ortogonalitas_ Isosceles:
   $\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\| = \|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|$, $\forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0$.
3. Ortogonalitas_ Birkhoff-James:
   $\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_{n-1}\| \geq \|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\|$, $\forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0$ dan $\forall \alpha \in$ R.
4. Ortogonalitas_ Gunawan:
   $\langle x,y|x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle = 0$, $\forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0$.

1. Diketahui
   $\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_n\|^2$, $\forall x_2,\cdots,x_n \neq 0$.

   Akan dibuktikan bahwa

   $\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2$, $\forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0$.

   $$\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_n\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_n\|^2$$

   $$\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2 = \|x,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2 + \|y,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2$$

   Dari (Gunawan, 2006) diperoleh

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x+y)+(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2-\left\|(x+y)-(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|x+x,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2-\left\|x-x,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2\right)+$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|y+y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2-\left\|y-y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2\right)$$

Karena x dan y ortogonal terhadap $\forall x_2,\cdots,x_n$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x+y)+(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2-\left\|(x+y)-(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|x+x,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2-\left\|x-x,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2\right)+$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|y+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2-\left\|y-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2\right)$$

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2=\left\|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2+\left\|y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2$$

2. Diketahui

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2=\left\|x-y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2,\quad \forall x_2,\cdots,x_n\neq 0.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|=\left\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|,\forall x_2,\cdots,x_{n-1}\neq 0.$$

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2=\left\|x-y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2$$

Dari (Gunawan, 2006) diperoleh

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x+y)+(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2-\left\|(x+y)-(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x-y)+(x-y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2-\left\|(x-y)-(x-y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2\right)$$

Karena x dan y ortogonal terhadap $\forall x_2,\cdots,x_n$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x+y)+(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2-\left\|(x+y)-(x+y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x-y)+(x-y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2-\left\|(x-y)-(x-y),x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2\left\|x_n\right\|^2\right)$$

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2=\left\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|^2$$

$$\left\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|=\left\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|$$

3. Diketahui

$$\left\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2\geq\left\|x,x_2,\cdots,x_n\right\|^2,\quad \forall x_2,\cdots,x_n\neq 0 \text{ dan } \forall\alpha\in\mathrm{R}.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\left\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|\geq\left\|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\right\|,\forall x_2,\cdots,x_{n-1}\neq 0 \text{ dan } \forall\alpha\in\mathrm{R}.$$

$$\left\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_n\right\|^2\geq\left\|x,x_2,\cdots,x_n\right\|^2$$

Dari (Gunawan, 2006) diperoleh

$$\frac{1}{4}\left(\left\|(x+\alpha y)+(x+\alpha y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2-\left\|(x+\alpha y)-(x+\alpha y),x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\right\|^2\right)\geq$$

$$\frac{1}{4}\left(\|x+x,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2-\|x-x,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2\right)$$

$$\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_{n-1}\| \geq \|x,x_2,\cdots,x_{n-1}\|$$

4. Diketahui

$$\|x+\alpha y,x_2,\cdots,x_n\|^2 \geq \|x,x_2,\cdots,x_n\|^2, \quad \forall x_2,\cdots,x_n \neq 0.$$

Akan dibuktikan bahwa

$$\langle x,y|x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle = 0, \ \forall x_2,\cdots,x_{n-1} \neq 0.$$

$$\langle x,y|x_2,\cdots,x_n\rangle = 0$$

Dari (Gunawan, 2006) diperoleh

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\cdots,x_n\|^2-\|x-y,x_2,\cdots,x_n\|^2\right)=0 \ \frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2-\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\|^2\right)=0$$

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2-\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2\right)=0$$

$$\frac{1}{4}\left(\|x+y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2-\|x-y,x_2,\cdots,x_{n-1}\|^2\right)\|x_n\|^2=0$$

$$\langle x,y|x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle = 0$$

Jadi dapat dikatakan apabila terdefinisi suatu norm-*n* maka norm-(*n*-1) terdefinisi.

2.3 Konvergensi Barisan di Ruang Norm-*n* dan Ruang Norm-(*n*-1)

Selanjutnya akan dikaji kriteria konvergensi barisan di ruang norm-*n* sebagaimana definisi berikut

Definisi 2.3a Misal $(X,\|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ ruang norm-n, suatu barisan $x(m)$ di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{m\to\infty}\|x(m)-x,x_2,\cdots,x_n\|=0$, $\forall x_2,\cdots,x_n \in X$. Dalam hal ini dapat ditulis $\lim_{m\to\infty} x(m)=x$ dan x disebut *limit barisan* $x(m)$. (Gunawan, 2000)

Dari definisi konvergensi barisan di ruang norm-*n* dapat dikembangkan suatu teorema sebagai berikut

Teorema 2.3b Misal $(X,\|\cdot,\cdots,\cdot\|)$ adalah ruang norm-n. X berdimensi *d*, dimana $2 \leq d < \infty$. Misal $\{e_1,e_2,\cdots,e_d\}$ basis dari X. Barisan $x(m)$ di X adalah konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}\|x(m)-x,e_i,\cdots,e_j\|=0$, $\forall i,j=1,2,\cdots,d$.(Gunawan, 2000)

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Diketahui barisan $x(m)$ di X adalah konvergen ke $x \in X$, artinya $\lim_{m\to\infty} x(m)=x$

Atau menurut definisi konvergensi barisan dalam norm-*n* $\lim_{m\to\infty}\|x(m)-x,x_2,\cdots,x_n\|=0$, $\forall x_2,\cdots,x_n \in X$

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\|x(m)-x,e_i,\cdots,e_j\|=0$, $\forall i,j=1,2,\cdots,d$

- Untuk $i=j$, maka sesuai dengan definisi barisan konvergen dalam norm-*n* diperoleh

$x_2 = e_1 \;, \cdots,$ dan $x_n = e_1 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_1\| = 0$

$x_2 = e_2 \;, \cdots,$ dan $x_n = e_2 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_2, \cdots, e_2\| = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_2 = e_d \;, \cdots,$ dan $x_n = e_d \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_d\| = 0$

Sehingga $\lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, d$.

- Untuk $i \neq j$, maka sesuai dengan definisi barisan konvergen dalam norm-*n* diperoleh

$x_2 = e_1 \;, \cdots,$ dan $x_n = e_2 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_2\| = 0$

$x_2 = e_1 \;, \cdots,$ dan $x_n = e_3 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_3\| = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_2 = e_1 \;, \cdots,$ dan $x_n = e_d \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_d\| = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_2 = e_d \;, \cdots,$ dan $x_n = e_1 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_1\| = 0$

$x_2 = e_d \;, \cdots,$ dan $x_n = e_2 \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_2\| = 0$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_2 = e_d \;, \cdots,$ dan $x_n = e_{d-1} \;\rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_{d-1}\| = 0$

Sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x, e_i, \cdots, e_j\| = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, d$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ basis dari X dan $\lim\limits_{n\to\infty} \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, d$.

Akan ditunjukkan bahwa barisan $x(m)$ di X konvergen ke $x \in X$ atau $\lim\limits_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_n\| = 0$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in X$

$\forall x_2, \cdots, x_n \in X$ dapat ditulis $x_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{2d} e_d$ $, \cdots,$ dan $x_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \cdots + \alpha_{nd} e_d$ dimana $\alpha_{ki} \in$ R, $k = 2, \cdots, n$, dengan sifat norm (nN 1) dan kombinasi linear, diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_n\| \\
&= \|x(m) - x, \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{2d} e_d, \\
&\qquad \cdots, \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \cdots + \alpha_{nd} e_d\| \\
&\leq |\alpha_{21}| \cdots |\alpha_{n1}| \; \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_1\| + |\alpha_{22}| \cdots |\alpha_{n2}| \; \|x(m) - x, e_2, \cdots, e_2\| + \\
&\qquad \cdots + |\alpha_{2d}| \cdots |\alpha_{nd}| \; \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_d\| \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{nj}| \; \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| \right)
\end{aligned}
$$

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_n\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{nj}| \; \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| \right); \;\; \forall n \in \mathrm{N}$$

$$0 = \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{nj}| \right) \cdot 0 = 0$$

Sehingga $\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_n\| = 0$, $\forall x_2, \cdots, x_n \in X$, dengan kata lain barisan $x(m)$ konvergen ke *x*.

Jadi terbukti bahwa barisan $x(m)$ di X adalah konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| = 0$, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, d$.

Selanjutnya akan dikaji bahwa apakah jika barisan pada ruang norm-*n* konvergen maka barisan pada ruang norm-(*n*-1) juga konvergen.

Teorema 2.3c Misal $(X, \|\cdot, \cdots, \cdot\|)$ adalah ruang norm-*n*. X berdimensi *d*, dimana $2 \leq d < \infty$. Misal $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ basis dari X. Jika barisan di ruang norm-*n* konvergen maka barisan di ruang norm-(*n*-1) konvergen.

Bukti :

Diketahui barisan pada ruang norm-*n* konvergen, artinya

$$\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_n\| = 0, \; \forall x_2, \cdots, x_n \in X$$

Akan ditunjukkan barisan pada ruang norm-(*n*-1) konvergen, artinya

$$\lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}\| = 0, \; \forall x_2, \cdots, x_{(n-1)} \in X$$

Dari (Gunawan, 2000) diperoleh

$$0 \leq \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}, x_n\|$$

$$\leq \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}\| \; \|x_n\| \; ; \; \|x\| \neq 0$$

$$\leq \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}\|$$

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}\|$$

Diketahui $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$ basis dari X dan

$$\lim_{n\to\infty} \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| = 0, \; \forall i, j = 1, 2, \cdots, d.$$

$\forall x_2, \cdots, x_{(n-1)} \in X$ dapat ditulis $x_2 = \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{2d} e_d$ $, \cdots,$ dan $x_{(n-1)} = \alpha_{(n-1)1} e_1 + \alpha_{(n-1)2} e_2 + \cdots + \alpha_{(n-1)d} e_d$ dimana $\alpha_{ki} \in \mathrm{R}$, $k = 2, \cdots, (n-1)$,

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)}\|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \|x(m) - x, \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \cdots + \alpha_{2d} e_d, \cdots,$$

$$\alpha_{(n-1)1} e_1 + \alpha_{(n-1)2} e_2 + \cdots + \alpha_{(n-1)d} e\|_d$$

$$\leq |\alpha_{21}| \cdots |\alpha_{(n-1)1}| \|x(m) - x, e_1, \cdots, e_1\| +$$

$$|\alpha_{22}| \cdots |\alpha_{(n-1)2}| \|x(m) - x, e_2, \cdots, e_2\| +$$

$$\cdots + |\alpha_{2d}| \cdots |\alpha_{(n-1)d}| \|x(m) - x, e_d, \cdots, e_d\|$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{(n-1)j}| \|x(m) - x, e_i, \cdots, e_j\| \right)$$

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \left\| x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)} \right\|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{(n-1)j}| \left\| x(m) - x, e_i, \cdots, e_j \right\| \right); \quad \forall n \in \mathrm{N}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{d} \left(|\alpha_{2i}| \cdots |\alpha_{(n-1)j}| \right) \cdot 0 = 0$$

Sehingga $\lim_{m\to\infty} \left\| x(m) - x, x_2, \cdots, x_{(n-1)} \right\| = 0$, $\forall x_2, \cdots, x_{(n-1)} \in X$, dengan kata lain barisan $x(m)$ konvergen ke *x*.

Jadi terbukti bahwa jika barisan di ruang norm-*n* konvergen maka barisan di ruang norm-(*n*-1) konvergen.

3. Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang dilakukan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan aspek ortogonalitas Pythagoras, Isosceles, Birkhoff-James, dan Gunawan membuktikan bahwa jika terdefinisi suatu ruang norm-*n* maka ruang norm-(*n*-1) terdefinisi dengan $n \geq 2$.
2. Terbukti bahwa jika $x(m)$ adalah barisan yang konvergen di ruang norm-*n* maka $x(m)$ barisan yang konvergen ruang norm-(*n*-1).
3. Terbukti bahwa jika ruang norm-*n* lengkap maka ruang norm-(*n*-1) lengkap.

Daftar Pustaka

Chu, Hahng-Yun, Sung Kyu Choi, and Dong Seung Kang. (2008). *Mapping of Conservative Distances in Linear n-Normed Spaces*. Elsevier.

Gunawan, H. (2006). *G-Orthogonality in n-Inner Product Spaces*. Simposium Matematika Analisis dan Aplikasinya. ITS. Surabaya.

Gunawan, H dan M. Mashadi. (2001). *On n-Normed Spaces*. Int. J. Math. Math. Sci. 27. 631 – 639.

Gunawan, H. (2002). *On n-Inner Products, n-Norm, and The Cauchy – Schwarz Inequality*. Sciential Matematical Japanical. Japan. 53 – 60.

Gunawan, H, Mashadi, S. Gemawati, dan I. Sihwaningrum. (2006). *On Orthogonality in 2-Normed Spaces Revisited*. Sciential Matematical Japanical. Japan. 53 – 60.

Gunawan, H. E. Kikianty, Mashadi, S. Gemawati, dan I. Sihwaningrum. (2006). *Orthogonality in n-Normed Spaces*. Submitted to J. Indones. Math. Soc. (MIHMI).

Kikianty, Eder. (2008). *Notion of Orthogonality in Normed Spaces*. Victoria University. Melbourne.

Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. New York.

Mazaheri, H. dan S. Golestani Nezhard. (2007). *Some Results on b-Orthogonality in 2-Normed Linear Spaces*. Int. Journal of Math. Analisis. Vol.1. 681 – 687.