SPECTRUM MATRIKS TERHUBUNG LANGSUNG JENIS-JENIS GRAF HASIL KALI KARTESIUS

Imam Fahcruddin
Jurusan Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
fahrudinuin@gmail.com

Abstrak

Himpunan eigenvalues grafik dari matriks adjacency disebut spectrum grafik. Spektrum dari suatu graf G dengan simpul n biasanya dinotasikan Sp (G). Ada juga beberapa cara pembentukan dari dua grafik, grafik baru dimana set vertexnya adalah produk Cartesian set vertex mereka. Dalam tulisan ini kita mempelajari spektrum produk Cartesian dua graf sederhana. Memanfaatkan teorema tentang spektrum produk Cartesian dua grafik sederhana, kami membuktikan bahwa :

1. Spektrum grafik tangga adalah

$$Sp(L_n)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$$

2. Spektrum grafik buku

$$Sp\left(P_2\times K_{1,n}\right)=[-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$$

3. Spektrum grafik grid

$$Sp\left(P_m\times P_n\right)=[2\left(\cos\left(\frac{k\,\pi}{(m+1)}\right)+\cos\left(\frac{l\,\pi}{(n+1)}\right)\right)].$$

Kata kunci: *Spectrum,Matriks Adjacency, Produk Cartesian Grafik*

Abstract

The set graph eigenvalues of adjacency matrix is called the graph spectrum. The spectrum of a graph G with n vertices is usually denoted Sp (G). There are also several ways the formation of the two graphs, new graphs which are set vertex is Cartesian product their set vertex. In this paper we study the spectrum of Cartesian product two simple graphs. Utilizing theorem proves that:

1. *The spectrum chart ladder is:*

$$Sp(L_n)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$$

2. *Spectrum grafik grid*

$$Sp\left(P_2\times K_{1,n}\right)=[-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$$

3. *Spectrum grafik grid*

$$Sp\left(P_m\times P_n\right)=[2\left(\cos\left(\frac{k\,\pi}{(m+1)}\right)+\cos\left(\frac{l\,\pi}{(n+1)}\right)\right)].$$

Keywords: *Spectrum, adjacency matrix, Cartesian Product Graphs*

1. Pendahuluan

Teori spectra graf mulai dirintis pada tahun 1950-an dan 1960-an. Salah satu topik dalam teori spectra graf yang banyak diteliti adalah spectrum. Kajian tentang spectrum pada monograf telah diperkenalkan oleh Dragoš M. Cvetković, Michael Doob, dan Horst Sachs dalam karya ilmiahnya yang berjudul *Spectra of Graph* pada tahun 1980, kemudian direvisi dan diterbitkan dalam sebuah buku yang berjudul *Recent Results in the Theory of Graph Spectra* pada tahun 1988.

Pada umumnya, studi tentang spectrum graf didasari pada nilai eigen dari representasi matriks terhubung langsung atau Laplacian pada graf yang memiliki sifat-sifat matematika yang menarik dan memiliki pola tertentu. Studi tentang aplikasinya juga telah dilakukan, diantaranya, penerapan polinomial karakteristik graf pada indeks topologi Z_G untuk identifikasi struktur molekul pada ikatan kimia dan aplikasi spectrum Laplacian graf pada segmentasi gambar.

Dari hasil kajian literatur, spectrum graf yang telah teliti meliputi graf komplit (K_n), graf komplit bipartisi $(K_{m,n})$ (Cvetković, 1973:51), graf sikel (C_n), graf lintasan (P_n)(Cvetković dan Gutman, 1975:40), graf triangular $(L(K_n))$, dan graf Lattice $(L(K_{m,m}), m \geq 2)$. Pada paper ini akan dikaji spectrum jenis-jenis graf hasilkali kartesius, yaitu graf tangga $(P_2 \times P_n)$, graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$, dan graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$.

2. Kajian Teori

Misalkan diberikan suatu graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, himpunan sisi $E(G)$ dan derajat dari titik v_n dinotasikan dengan d_{v_n}, $A(G)$ dikatakan sebagai matrik terhubung *nxn* dari graf G apabila elemennya terdiri dari $a_{ij} = 1$ jika v_i dan v_j terhubung, 0 untuk yang lainya (Frank Harary, 1969:150). Suatu vektor tak nol *x* pada R^n disebut vektor eigen dari $A(G)$ jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari *x;* yakni, $Ax = \lambda x$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari $A(G)$, dan *x* disebut sebagai vektor eigen dari $A(G)$. Karena vektor-vektor tersebut merupakan vektor taknol dan bebas linier, maka vektor-vektor ini akan membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan λ. Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks nxn, kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$ yang ekuivalen dengan

$$(I\lambda - A)x = 0 \qquad (2.1)$$

Agar λ menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan (1). Persamaan (1) akan memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$\det(I\lambda - A)x = 0 \qquad (2.2)$$

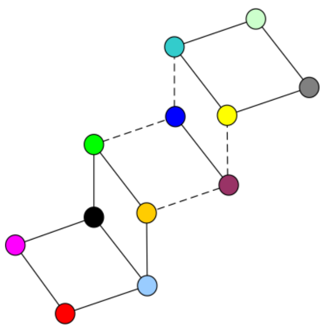
Persamaan (2) disebut persamaan polinomial karakteristik dari matriks $A(G)$, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai–nilai eigen dari $A(G)$. (Anton dan Rorres, 2004:384-389).

Definisi 2.1

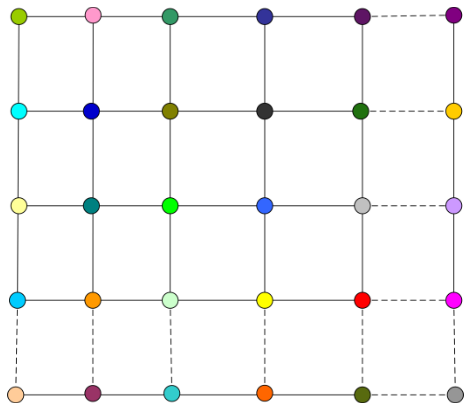
Misalkan $f_n(\lambda) = \det(I\lambda - A(G))$ adalah polinomial karakteristik dari matriks terhubung langsung graf *G*, maka spectrum dari graf *G* dengan *n* titik yang dinotasikan dengan $Sp(G)$ adalah $Sp(G) = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_i]$ dimana λ_i merupakan akar-akar dari $f_n(\lambda) = 0$. (λ_i adalah nilai-nilai eigen dari matriks $A(G)$). (Cvetković dan Doob, 1980:22).

Definisi 2.2

Graf tangga (L_n) adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan *n* titik atau dapat ditulis $L_n = P_2 \times P_n$. (Gallian, 2007:14).



Gambar 2.1 Graf Tangga (L_n)



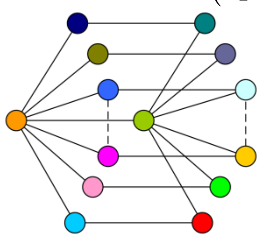
Gambar 2.2 Graf Jaring-Jaring

Definisi 2.5

Graf jaring–jaring adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan *m* titik dan graf lintasan dengan *n* titik atau dapat ditulis $(P_m \times P_n)$. (Bondy dan Murty, 2008:30).

Definisi 2.6

Graf buku adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan 2 titik dan graf bipartisi komplit dengan banyaknya himpunan partisi $|X| = 1$ dan $|Y| = n$ atau dapat ditulis $(P_2 \times K_{1,n})$.



Gambar 2.3 Graf Buku

Teorema 2.8

Diberikan dua graf sederhana G dan H dengan himpunan titik–titik $V(G)=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ dan $V(H)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. $A(G)$ dan $A(H)$ berturut-turut adalah matriks terhubung langsung dari graf G dan H. $I(G)$ dan $I(H)$ adalah matriks identitas dengan ukuran $m\times m$ dan $n\times n$, maka matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius graf G dan H adalah

$$A(G\times H)=A(H)\otimes I(G)+I(H)\otimes A(G).$$

Teorema 2.9

Diberikan dua graf sederhana G dan H dengan $Sp(G)=[\xi_1,\xi_2,...,\xi_m]$ dan $Sp(H)=[\mu_1,\mu_2,...,\mu_n]$, maka spectrum matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius graf G dan H adalah

$$Sp(G\times H)=\left[\xi_i+\mu_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\right].$$

Bukti.

Diketahui bahwa $A(G\times H)=A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$, akan ditunjukkan bahwa $A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$ serupa dengan $J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}$, dimana $J_{A(G)}=P^{-1}A(G)P$ dan $J_{A(H)}=Q^{-1}A(H)Q$ adalah matriks diagonal dari matriks $A(G)$ dan $A(H)$ maka $Sp(G\times H)=\left[\xi_i+\mu_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\right]$.

Misalkan $I_{m\times m}=\left(P^{-1}IP\right)$ dan $I_{n\times n}=\left(Q^{-1}IQ\right)$, sehingga

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=\left(Q^{-1}A(H)Q\right)\otimes\left(P^{-1}IP\right)+\left(Q^{-1}IQ\right)\otimes\left(P^{-1}A(G)P\right)$$

$$=\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left(A(H)\otimes I\right)(Q\otimes P)+\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left(I\otimes A(H)\right)(Q\otimes P)$$

$$=\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left[\left(A(H)\otimes I\right)+\left(I\otimes A(H)\right)\right](Q\otimes P)$$

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=(Q\otimes P)^{-1}\left[\left(A(H)\otimes I\right)+\left(I\otimes A(H)\right)\right](Q\otimes P)$$

Yang berarti bahwa matriks $J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}$, merupakan matriks diagonal yang diperoleh dengan cara mendiagonalisasikan matriks $A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$.

Karena $J_{A(H)}=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_j\end{pmatrix}$ dan $J_{A(G)}=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \xi_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \xi_i\end{pmatrix}$, maka diperoleh

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=\begin{pmatrix}\mu_1\left(I_{m\times m}\right) & 0\left(I_{m\times m}\right) & \cdots & 0\left(I_{m\times m}\right)\\ 0\left(I_{m\times m}\right) & \mu_2\left(I_{m\times m}\right) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\left(I_{m\times m}\right)\\ 0\left(I_{m\times m}\right) & \cdots & 0\left(I_{m\times m}\right) & \mu_j\left(I_{m\times m}\right)\end{pmatrix}_{mn\times mn}+$$

$$\begin{pmatrix} (1)J_{A(G)} & (0)J_{A(G)} & \cdots & (0)J_{A(G)} \\ (0)J_{A(G)} & (1)J_{A(G)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0)J_{A(G)} \\ (0)J_{A(G)} & \cdots & (0)J_{A(G)} & (1)J_{A(G)} \end{pmatrix}_{mn\times mn}$$

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=\begin{pmatrix} \mu_1+\xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2+\xi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_j+\xi_i \end{pmatrix}_{mn\times mn}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $\left(J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}\right)$ adalah

$$\left|I\lambda-\left(J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}\right)\right|=0$$

$$\left(\lambda_1-(\xi_1+\mu_1)\right)\left(\lambda_2-(\xi_2+\mu_2)\right)\ldots\left(\lambda_{mn}-\left(\xi_i+\mu_j\right)\right)=0$$

$$Sp\left(G\times H\right)=\left[\xi_i+\mu_j,1\le i\le m,1\le j\le n\right].$$

(Gago, 2008:31)

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1

Misal $L_n=\left(P_2\times P_n\right)$ adalah graf tangga dengan $n\in N$, maka spectrum matriks terhubung langsung dari graf tangga $\left(L_n\right)$ adalah

$$Sp\left(L_n\right)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right], \text{ untuk } k=1,2,3,\ldots,n.$$

Bukti.

Diketahui bahwa $Sp\left(P_2\right)=[1,-1]$, $Sp\left(P_n\right)=\left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$, $J_{A(P_2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Misalkan matriks diagonal yang diperoleh dari matriks terhubung langsung graf lintasan $\left(P_n\right)$ adalah $J_{A(P_n)}=\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$, maka

$$J_{A(P_n)} \otimes I(P_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \gamma_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0 & \gamma_n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \gamma_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \gamma_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$I_{A(P_n)} \otimes J(P_2) = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0 & 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$J_{A(P_n)} \otimes I(P_2) + I_{A(P_n)} \otimes J(P_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1+1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1-1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2+1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \gamma_2-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \gamma_n+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \gamma_n-1 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $\left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)}\right)$ adalah

$$\left| I\lambda - \left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)}\right)\right| = 0$$

$$\left(\lambda_1 - (\gamma_1+1)\right)\left(\lambda_2 - (\gamma_1-1)\right)\ldots\left(\lambda_{2n-1} - (\gamma_i+1)\right)\left(\lambda_{2n} - (\gamma_i-1)\right) = 0$$

$$Sp(L_n) = [\gamma_i+1, \gamma_i-1, 1 \le i \le n].$$

Jadi $Sp(L_n) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)+1, 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)-1\right]$, untuk k = 1,2,3, …, n.

Teorema 3.2

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$, dengan $n \in N$ adalah

$$Sp(P_2 \times K_{1,n}) = [-1, -1 \pm \sqrt{n}, 1 \pm \sqrt{n}, 1].$$

Bukti.

Misalkan $J_{A(P_2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan $J\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$ sehingga

$$J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} -1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kemudian diperoleh $J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) + I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right)$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1\pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2n+2)\times(2n+2)}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) + I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right)$ adalah

$$\left| I\lambda - \left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)} \right) \right| = 0$$

$$\left(\lambda - \left(-1\pm\sqrt{n}\right)\right)\left(\lambda-(-1)\right)...\left(\lambda-(-1)\right)\left(\lambda-\left(1\pm\sqrt{n}\right)\right)\left(\lambda-1\right)...\left(\lambda-1\right) = 0$$

$$Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right) = [-1, -1\pm\sqrt{n}, 1\pm\sqrt{n}, 1].$$

Teorema 3.3

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf jaring-jaring $\left(P_m \times P_n\right)$ dengan $m, n \in N$ adalah

$$Sp\left(P_m \times P_n\right) = [2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{(m+1)}\right) + \cos\left(\frac{l\pi}{(n+1)}\right)\right)],$$

untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

Bukti.

Dari penelitian sebelumnya diketahui bahwa $Sp\left(P_m\right) = \left[2\cos\left(\frac{l\pi}{(m+1)}\right)\right]$ untuk l = 1,2,3, …, m dan $Sp\left(P_n\right) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$ untuk k = 1,2,3, …, n maka berdasarkan teorema 2.9 diperoleh

$$Sp\left(P_m \times P_n\right) = [2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right) + 2\cos\left(\frac{l\pi}{(m+1)}\right)],$$

untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diatas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Misal $L_n = \left(P_2 \times P_n\right)$ adalah graf tangga dengan $n \in N$, maka bentuk umum spectrum graf tangga $\left(L_n\right)$ adalah

   $$Sp\left(L_n\right) = \left[1 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right), -1 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right],$$ untuk k = 1,2,3, …, n.

2. Bentuk umum spectrum graf jaring-jaring $\left(P_m \times P_n\right)$ dengan $m, n \in N$ adalah

   $$Sp\left(P_m \times P_n\right) = [2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{(m+1)}\right) + \cos\left(\frac{l\pi}{(n+1)}\right)\right)],$$

   untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

3. Bentuk umum spectrum graf buku $\left(P_2 \times K_{1,n}\right)$, dengan $n \in N$ adalah

   $$Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right) = [-1, -1 \pm \sqrt{n}, 1 \pm \sqrt{n}, 1].$$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. & Rorres, Chris. (2004). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory*. New York: Springer.

Cvetković D. M., Gutman, I. (1974). *On Spectral Structure of Graphs Having The Maximal Eigenvalue Not Greater Than Two.* Publications De L`Institut Mathematique. Nouvelle serie, tome 18 (32). Page 39-45.

Cvetković D. M., Doob, Michael, Sachs, Horst. (1980). *Spectra of Graphs Theory and Application.* New York: Academic Press.

Silvia, Gago. (2008). *Eigenvalue Distribution in Power Law Graphs.* Aplimat - Journal of Applied Mathematics. Volume 1, Number 1. Page 29–35.

Hosoya, Haruo. (1981). *Graphical and Combinatorial Aspects of Some Orthogonal Polynomials.* Natural Science Report, Ochanomizu University. Vol. 32, No. 2. Page 127-138.