METODA PENGKONSTRUKSIAN PERSEGI AJAIB

Hendarto Cahyono
Universitas Muhammadiyah Malang
hendartochy@gmail.com

Abstrak

Sebuah persegi ajaib order n adalah n dengan n matriks dengan bilangan bulat non-negatif yang berbeda dengan sifat bahwa jumlah angka dalam setiap baris, setiap kolom dan diagonal utama dan belakang sama. Jumlah ini adalah jumlah ajaib.
Dalam tulisan ini kita akan membahas beberapa metode untuk membangun n^2 *bilangan bulat pertama yang positif untuk kotak ajaib. Metode pertama yang akan dibentuk adalah Dekomposisi Persegi Latin. Beberapa persegi ajaib dapat diturunkan secara langsung dengan metode ini. Metode lain yang juga akan dibahas adalah metode trial and error, konstruksi De La Loubére, konstruksi Strachey dan konstruksi produk.*
Akhirnya kami menyimpulkan bahwa untuk semua n bilangan bulat positif, $n \neq 2$*, dapat dibangun sebuah persegi ajaib order-n.*

***Kata Kunci** : Persegi Ajaib, Dekomposisi Persegi Latin, Konstruksi De La Loubére, Konstruksi Strachey, Konstruksi produk.*

Abstract

A magic square of order n is an n by n matrix with distinct nonnegative integer with the property that the sum of the numbers in each row, each column and the main and back diagonals is same. This sum is the magic sum. In this paper we will discuss some methods to construct the first n_2 *positive integers for magic squares. The first method that will be established is Latin square Decomposition. Some magic squares can be derived directly with this method. Other methods that also will be discussed are trial and error method, De La Loubére construction, Strachey construction, and product construction. Finally we conclude that for all positif integers n, n □ 2, it can be constructed a magic square of order-n.*

***Keywords** : magic square, decomposition, orthogonal Latin square, De La Loubére construction, Strachey construction, product construction.*

1. Latar Belakang Masalah

Dalam kasus umum persegi ajaib (*Magic Squares*) ditunjukkan oleh bilangan-bilangan dalam tabel yang secara numerik dan analitik elemen-elemennya memenuhi sejumlah ketentuan dasar dan relasi penjumlahan. Relasi dasar yang mengaitkan beberapa sifat konstan bagi elemen-elemen yang berlokasi dalam baris, kolom dan dua diagonal dari tabel persegi, dan relasi penjumlahan yang mengaitkan karakteristik jumlahan untuk beberapa himpunan lain dari elemen-elemennya. Dalam perkembangannya, relasi bisa diperluas tidak hanya jumlahan biasa tetapi juga diterapkan pada jumlahan modulo. Hillard (1994) memperkenalkan operasi modulo prima untuk memperbesar persegi ajaib.

Suatu cara tradisional untuk menyelesaikan semua masalah yang disebutkan di atas dengan pemilihan sifat perhitungan tertentu dari barisan bilangan yang akan membangkitkan persegi ajaib. Sebagai contoh, dengan cara ini Andrew (1917), Benson (1976) dan Cazalas (1934) telah menyelesaikan masalah mengkonstruksi persegi ajaib beberapa bilangan asli dan kelipatannya, Andrew (1960) dan Chebrakov (1998) menye-lesaikan untuk pengkonstruksian bilangan prima.

Cahyono (2004) menguraikan formulasi analitik dan algoritma untuk menyusun beberapa persegi ajaib melalui dekomposisi persegi Latin. Namun formulasi ini masih berlaku secara parsial. Kreher (2004) mencoba memformulasikan persegi ajaib berorder ganjil ($2n + 1$). Dengan formula ini maka separo dari pekerjaan konstruksi persegi ajaib sembarang order sudah selesai.

2. Metodologi Penelitian

Penelitian ini direncanakan dalam empat tahapan yaitu tahap *inisisasi*, *investigasi*, *pengembangan*, dan *verifikasi*.

Hal yang akan dilakukan pada tahap inisiasi adalah

1. Pengkajian literatur terutama tentang karakterisasi persegi ajaib berorder tertentu yang menggunakan metoda dekomposisi persegi latin. Mempelajari metoda yang digunakan dalam studi tersebut.
2. Mempelajari kembali dekomposisi bilangan atas bilangan lain yang tersusun dalam bentuk matriks persegi.

Sedangkan pada tahap investigasi yang dilakukan adalah

1. Penyelidikan tentang eksistensi persegi ajaib untuk beberapa order. Pada tahap ini diharapkan mendapatkan pengetahuan tentang eksistensi persegi ajaib pada order kecil. Pengetahuan ini diharapkan dapat diperumum pada tahap selanjutnya.
2. Mengkaji lebih lanjut sifat-sifat struktural lain yang berguna bagi pengembangan generalisasi.
3. Mengkonstruksi persegi ajaib dengan order yang lebih besar berdasarkan karakteristik dan sifat struktural persegi ajaib order yang lebih kecil yang telah diturunkan pada tahap sebelumnya.

Pada tahap pengembangan hal yang akan dilakukan adalah

1. Menyusun hasil temuan di atas untuk mengkaji kasus yang lebih umum.
2. Menyusun syarat perlu dan cukup untuk eksistensi persegi ajaib order-n.
3. Menggunakan syarat perlu dan cukup tersebut untuk mengkaji lebih lanjut tentang ada-tidaknya persegi ajaib tersebut.

Pada tahap verifikasi hal yang akan dilakukan adalah dengan menuliskan hasil ke dalam bukti-bukti matematis.

3. Tinjauan Pustaka

3.1 Konsep Dasar Persegi Ajaib

3.1.1 Jumlah Ajaib

Pandang persegi ajaib baku $n \times n$, maka elemen-elemen pada persegi ini adalah: $1, 2, 3, \ldots, n^2$. Untuk persegi ini maka jumlah semua bilangan adalah

$$S_{n^2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n^2$$

$$= \frac{n^2\left(1+n^2\right)}{2} \tag{3.1}$$

dan jumlah bilangan-bilangan dalam satu garis atau sering disebut sebagai bilangan ajaib persegi ini adalah

$$S = \frac{S_{n^2}}{n} = \frac{n\left(1+n^2\right)}{2} \tag{3.2}$$

3.1.2 Dekomposisi Bilangan Persegi

Untuk memperoleh suatu aturan tertentu dalam menyusun persegi ajaib dari sembarang order, menarik diobservasi bahwa semua bilangan $x = 1, 2, 3, \ldots, n^2$ dapat didekomposisi dengan rumus:

$$x = pn + q, \tag{3.3}$$

dengan mengambil nilai-nilai $p = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, dan $q = 1, 2, 3, \ldots, n$. Jelas bahwa semua bilangan dari 1 sampai n^2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi dari setiap nilai dari p dengan setiap nilai dari q.

Lebih lanjut, semua bilangan yang digunakan untuk mendekomposisi bilangan pada persegi dengan rumus $pn + q$ adalah memungkinkan diekspresikan dengan menggunakan dua bagian, yang berurutan, dimana menggunakan huruf-huruf Latin a, b, c, …, untuk bagian pertama pn, dan huruf Yunani α, β, γ, δ, …, untuk bagian kedua q. Dalam hal ini untuk sembarang bilangan x selalu ada huruf Latin dan Yunani yang jumlahnya sama dengan x dengan huruf-huruf Latin menjalani nilai-nilai: 0, n, $2n$, $3n$, $(n - 1)n$, dan huruf-huruf Yunani menjalani nilai-nilai: 1, 2, 3, 4, …, n. Nantinya urutan penulisan huruf-huruf Latin dan Yunani tidak harus dalam bentuk tertentu, dan sembarang huruf latin dapat menyatakan bilangan-bilangan 0, n, $2n$, $3n$, $(n - 1)n$, sepanjang semua nilai berbeda diambil darinya, demikian pula untuk huruf-huruf Yunani.

Sekarang sembarang bilangan 1, 2, …, n^2 dalam persegi dapat direpresentasikan dengan sebuah pasangan huruf Latin dan huruf Yunani, katakan dengan $b + \delta$ atau $a + \beta$, dan sebagainya. Jika masing-masing huruf Latin digabungkan dengan masing-masing huruf Yunani, maka jelas bahwa semua bilangan dari 1 sampai n^2 harus dihasilkan, dan juga jelas bahwa setiap kombinasi yang berbeda dari huruf-huruf selalu menghasilkan bilangan yang berbeda, dengan tidak ada bilangan yang terulang.

3.1.3 Persegi Latin

Persegi Latin order-n tersusun atas n bilangan yang berbeda. Dalam persegi Latin n bilangan-bilangan itu tersusun sedemikian hingga setiap bilangan berada tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom. Normalnya n bilangan itu diambil dari n bilangan bulat posisif pertama.

Dua persegi latin $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ berorder-n dikatakan *ortogonal* jika pasangan berurutan (a_{ij}, b_{ij}) semuanya berbeda untuk $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

3.1.4 Dekomposisi Persegi Latin Ortogonal

Telah diperlihatkan bahwa semua bilangan dalam persegi dapat dinyatakan dengan kombinasi dari huruf Latin dan Yunani. Hal ini akan memberikan suatu aturan untuk pengkonstruksian suatu persegi ajaib. Pertama, huruf-huruf Latin diletakkan dalam setiap elemen persegi sedemikian hingga jumlah dalam setiap garis adalah sama. Oleh karena terdapat n huruf dan harus mengisi elemen sebanyak n^2 secara bersama-sama dalam persegi, maka masing-masing huruf akan berulang muncul sebanyak n kali. Secara sama huruf-huruf Yunani diletakkan dalam setiap elemen persegi sedemikian hingga jumlah dalam setiap garis adalah sama. Maka, untuk semua garis, jumlah semua bilangan yang dibuat oleh kombinasi huruf Latin dan Yunani akan sama. Lebih lanjut, dalam penyusunan dimana setiap huruf Latin dikombinasikan dengan setiap huruf Yunani, dengan metoda ini tidak satupun bilangan dari 1 sampai n^2 yang terlewatkan, dan tidak akan ada yang dihasilkan dua kali.

Dengan menggunakan aturan di atas untuk membuat masing-masing order persegi bergantung pada berapa banyaknya elemen, akan dimulai dengan sembilan elemen atau order tiga. Hal ini jelas jika persegi yang terdiri dari satu sel akan selalu ajaib berapapun elemen bilangannya. Untuk persegi dengan order dua yaitu persegi dengan 4 elemen, tidak cukup ruang untuk penyusunan seperti di atas. Lebih lanjut, secara umum terlihat bahwa untuk masing-masing tipe, ada n huruf Latin dan juga n huruf Yunani, dan semua garis mempunyai sejumlah sel yang sama, dengan kondisi yang diberikan terpenuhi jika masing-masing garis memuat semua huruf Latin dan Yunani. Bagaimanapun jika huruf yang sama muncul dua atau tiga kali dalam suatu garis, maka selalu perlu mempunyai jumlah semua huruf yang terjadi dalam setiap baris sama dengan jumlah semua huruf Latin $a + b + c + \ldots$, atau jumlah semua huruf Yunani $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$

3.2 Konstruksi Analitik Persegi Ajaib

3.2.1 Metoda Dekomposisi Persegi Latin

Meskipun metoda analitik dalam mengkonstruksi persegi ajaib hanya berlaku pada order tertentu, namun cara ini dipandang sebagai pembangkit keberadaan persegi ajaib selanjutnya yang berorder lebih besar. Akan dibahas eksistensi dan beberapa variasi metoda konstruksi persegi ajaib pada beberapa order yang diberikan.

a. Persegi Ajaib 3 × 3

Untuk mendekomposisi persegi ajaib berorder 3, atau $n = 3$, maka diperlukan huruf-huruf Latin a, b, c; dan huruf-huruf Yunani α, β, γ, di mana huruf-huruf Latin menjalani nilai-nilai 0, 3, 6 dan huruf-huruf Yunani menjalani nilai-nilai 1, 2, 3. Sekarang dimulai dengan huruf a, b, c, dan mudah untuk memasukkannya ke dalam 9 sel dari persegi dalam setiap baris dan kolom dari ketiga huruf yang terjadi. Sebagai contoh seperti pada gambar 3.1. di bawah ini:

a	b	c
b	c	a
c	a	b

Gambar 3.1

Terlihat bahwa dalam satu diagonal masing-masing huruf a, b, c muncul, tetapi dalam diagonal lain huruf yang sama c muncul tiga kali; dan mudah dilihat bahwa tidak mungkin terjadi semua ketiga huruf yang berbeda dalam kedua garis (diagonal) hanya sekali. Bagainamapun, hal ini tidak menyebabkan suatu masalah sepanjang diagonal $3c$ adalah sama dengan jumlah diagonal yang lain $a + b + c$; yaitu memberikan $2c = a + b$. Dari hal ini, jelas bahwa c harus diambil nilai 3, dan huruf a dan b dikaitkan dengan nilai 0 atau 6; jadi itu akan menjadi $2c = a + b$. Oleh karena itu akan menjadi mungkin untuk mengambil salah satu dari a = 0 atau b = 0 dan dari sini, jumlah masing-masing garis adalah $a + b + c = 9$.

Secara sama, huruf-huruf Yunani dapat didistribusikan dalam persegi order 3 dan kita dapat menyatakannya dalam gambar 3.2 dengan susunan terbalik dengan huruf Latin. :

γ	β	α
α	γ	β
β	α	γ

Gambar 3.2

Dalam hal ini perlu dibatasi bahwa $2\gamma = \alpha + \beta$, dan oleh karena itu haruslah $\gamma = 2$. Maka jika dikombinasikan secara alami masing-masing sel dari gambar 2.1 dengan masing-masing sel pada gambar 2.2 yang seletak akan terlihat bahwa masing-masing huruf Latin dikombinasikan dengan masing-masing huruf Yunani, sedemikian hingga mengkombinasikan semua bilangan dari 1 sampai 9; dan ini akan memberikan gambar 3.3. berikut:

$a+\gamma$	$b+\beta$	$c+\alpha$
$b+\alpha$	$c+\gamma$	$a+\beta$
$c+\beta$	$a+\alpha$	$b+\gamma$

Gambar 3.3

Dengan mengambil c = 3 dan γ = 2 pada gambar 2.3, maka huruf a dan b bernilai 0 dan 6, dan juga huruf α dan β bernilai 1 dan 3. Jika diandaikan bahwa a = 0 dan b = 6, dan α = 1 dan β = 3, maka diperoleh persegi ajaib seperti pada gambar 3.4. berikut ini :

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Gambar 3.4

Terlihat bahwa jumlah untuk masing-masing garis adalah 15. Jika nilai-nilai dari huruf a dan b dipermutasikan, dan demikian pula α dan β, jelas bahwa akan diperoleh suatu persegi ajaib baru.

b. Persegi Ajaib 4 × 4

Untuk menyususun persegi ajaib berorder 4 yaitu n = 4 dalam bentuk dekomposisi dua persegi Latin, dibutuhkan empat huruf Latin a, b, c, d dengan nilai-nilai 0, 4, 8, 12, dan juga empat huruf Yunani α, β, γ, δ dengan nilai-nilai 1, 2, 3, 4. Kemudian susun huruf-huruf Latin dalam bentuk persegi Latin.

Karena di sini tidak ada aturan menyusun keempat huruf a, b, c, d dalam baris pertama, maka masukkan mereka dalam urutan. Untuk mengisi elemen diagonal utama, pada sel kedua diagonal ini tempatkan huruf c atau d. Misalkan dipilih c, maka semua huruf akan terisikan pada diagonal utama, dengan memperhatikan huruf yang sama tidak boleh berada dua kali pada sembarang baris atau kolom. Dengan cara di atas maka dapat diperoleh susunan dalam gambar 3.5 berikut:

a	*b*	*c*	*d*
d	*c*	*b*	*a*
b	*a*	*d*	*c*
c	*d*	*a*	*b*

Gambar 3.5

Jika diperhatikan masing-masing diagonal berisi keempat huruf, sehingga tidak ada persyaratan pendahuluan untuk nilai-nilai huruf *a*, *b*, *c*, *d*. Demikian juga apabila dalam tempat sel kedua diagonal utama diisikan *d*, gambar yang dihasilkan hanyalah kemungkinan bentuk susunan lain, sehingga dengan menggunakan gambar ini semua kemungkinan lain dapat diwakili.

Sekarang untuk memasukkan huruf-huruf Yunani, karena tidak ada baris atau kolom tengah yang diberikan, ambil diagonal utama *a*, *c*, *d*, *b* sebagai senter, dan tentukan hanya sekali dalam sel yang terletak pada sisi lain yang berjarak sama dua huruf yang berbeda. Oleh karena itu pertama tambahkan huruf-huruf Latin pada diagonal utama dengan huruf-huruf Yunani yang ekuivalen, dan kemudian kombinasikan huruf-huruf Yunani dengan ekuivalensi refleksinya yaitu: *a* dengan δ, *b* dengan γ, *c* dengan β, *d* dengan α. Dengan cara ini dapat diperoleh gambar 3.6. di bawah ini.

$a+\alpha$	$b+\delta$	$c+\beta$	$d+\gamma$
$d+\beta$	$c+\gamma$	$b+\alpha$	$a+\delta$
$b+\gamma$	$a+\beta$	$d+\delta$	$c+\alpha$
$c+\delta$	$d+\alpha$	$a+\gamma$	$b+\beta$

Gambar 3.6

Dengan demikian persegi ajaib di atas telah didekomposisi atas dua persegi Latin, yaitu dalam huruf-huruf Latin dan Huruf-huruf Yunani, secara penuh dalam semua baris kolom dan diagonal tanpa adanya sejumlah pembatasan. Karena ada 4! = 24 variasi susunan empat huruf, maka secara bersama-sama ada $24 \times 24 = 576$ gambar persegi ajaib berbeda dapat dibentuk, dan beberapa dari bentuk yang dibuat dengan cara ini mempunyai bentuk yang benar-benar berbeda struktur.

c. Persegi Ajaib 5 × 5

Untuk menyusun persegi ajaib order 5 diperlukan lima huruf Latin *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, dan lima huruf Yunani α, β, γ, δ, ε, yang menjalani nilai-nilai masing-masing 0, 5, 10, 15, 20 untuk huruf-huruf Latin, dan 1, 2, 3, 4, 5 untuk huruf-huruf Yunani. Kedua jenis huruf harus berada dalam satu sel dalam persegi dalam susunan sedemikian hingga semua huruf berada dalam setiap baris, kolom, dan kedua diagonal.

Pertama masukkan semua huruf latin dalam urutan di baris atas persegi, dan kemudian isikan diagonal utama dengan huruf sedemikian hingga huruf yang sama tidak muncul dua kali dalam sembarang garis lainnya, yang mana cara ini dapat dilakukan dengan lebih dari satu cara. Sekali garis ini telah dibuat, maka diagonal lainnya segera dapat ditentukan. Kemudian di bawah sel tengah isikan *a* dan di atasnya isikan dengan *d*, maka elemen-elemen dalam kolom tengah dapat terisikan dengan lengkap, dan selanjutnya elemen-elemen dalam baris sisa dapat segera dilengkapi. Salah satu hasil dapat diperoleh seperti gambar 3.7 berikut ini memberikan bentuk persegi Latin berorder 5.

a	*b*	*c*	*d*	*e*
e	*c*	*d*	*a*	*b*
d	*e*	*b*	*c*	*a*
b	*d*	*a*	*e*	*c*
c	*a*	*e*	*b*	*d*

Gambar 3.7

Selanjutnya untuk mengisi sel dengan huruf-huruf Yunani, adalah tidak membantu apabila dimulai dengan menggunakan salah satu diagonal. Tetapi jika dipilih kolom tengah, maka terdapat huruf-huruf yang berbeda pada setiap kedua sisi kolom yang terkait. Sehingga isikan kolom tengah dengan huruf-huruf Yunani yang ekuivalen, dan huruf yunani di tempat ekuivalen Latin refleksinya, yang kemudian diteruskan dengan pengisian sel lain dengan mempertimbangkan keberadaan huruf lain tidak boleh dua kali dalam setiap garis. Maka dengan cara di atas dapat diperoleh persegi ajaib seperti pada gambar 3.8 berikut ini:

$a+\varepsilon$	$b+\delta$	$c+\gamma$	$d+\beta$	$e+\alpha$
$e+\beta$	$c+\alpha$	$d+\delta$	$a+\gamma$	$b+\varepsilon$
$d+\alpha$	$e+\gamma$	$b+\beta$	$c+\varepsilon$	$a+\delta$
$b+\gamma$	$d+\varepsilon$	$a+\alpha$	$e+\delta$	$c+\beta$
$c+\delta$	$a+\beta$	$e+\varepsilon$	$b+\alpha$	$d+\gamma$

Gambar 3.8

Jelas bahwa tidak ada pembatasan pada gambar yang telah dihasilkan dalam gambar 2.16, dan huruf Latin dan Yunani dapat diambil sembarang bilangan yang ditentukan. Karena terdapat lima huruf maka terdapat 5! = 120 permutasi yang mungkin, dan secara keseluruhan terdapat 14.400 variasi bentuk persegi ajaib 5×5.

3.2.2 Konstruksi Coba-Salah

Harus diakui bahwa metoda Coba-Salah merupakan salah satu cara kuno untuk memperoleh sesuatu yang diinginkan, meskipun tidak efektif dan kurang ilmiah. Namun jika dikaitkan dengan masalah eksistensi hal ini tidak menjadikan masalah. Bahkan cara ini dipandang sebagai tonggak lahirnya metoda yang baru.

Salah satu hasil metoda coba-salah dalam menemukan eksistensi persegi ajaib adalah ketika ditunjukkan keberadaan persegi ajaib berorder 8. Adalah *Bejamin Franklin* (Kreher, 2004) seorang Presiden Amerika Serikat, dalam suatu biografinya mengatakan bahwa ketika merasa penat duduk dalam dengar pendapat di Senat dan melepas lelah dengan mencoba menyusun persegi ajaib berorder 8 seperti pada gambar 3.9 berikut ini. Meskipun tidak disertai dengan bagaimana formulasi analitik untuk mengkonstruksinya, namun cukup untuk menyimpulkan bahwa ini merupakan hasil pemikiran cerdas dan mendasar.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Gambar 3.9

3.2.3 Konstruksi De La Loubére

Salah satu bentuk generalisasi konstruksi persegi ajaib, *De La Loubére* pada tahun 1693 (Kreher, 2004) telah memberikan suatu metoda umum dalam mengkonstruksi persegi ajaib berorder ganjil $2m + 1$. Meskipun masih sebatas order bilangan ganjil namun jelas ini merupakan hasil yang menggembirakan untuk penyelesian masalah konstruksi persegi ajaib.

Langkah-langkah yang diberikan dalam menyusun persegi beroder ganjil adalah sebagi berikut :

1. Tempatkan bilangan 1 dalam sel tengah baris pertama.
2. Secara berturut-turut tempatkan bilangan-bilangan berikutnya dalam diagonal dalam arah kanan atas kecuali:
   a) Apabila sudah menjangkau baris paling atas maka bilangan selanjutnya ditulis dalam baris paling bawah dan kolom selanjutnya di mana elemen pada baris paling atas berada.
   b) Apabila sudah menjangkau kolom paling kanan, maka bilangan selanjutnya dituliskan pada kolom paling kiri dan baris sebelumnya dimana elemen pada kolom paling kanan berada.
   c) Apabila baris atasnya yang akan diisi bilangan berikutnya sudah terisi, atau jika pojok kanan atas telah terisi maka tulislah bilangan selanjutnya itu dalam kolom yang sama dan baris dibawahnya.

Sebagai contoh metoda di atas dapat diterapkan untuk mengkonstruksi persegi ajaib berorder-5 seperti pada gambar 3.10 di bawah ini

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 3.10

4. Hasil Penelitian

Suatu upaya untuk melakukan generalisasi konstruksi persegi ajaib pada semua order adalah memodifikasi bentuk persegi ajaib yang telah ditemukan sebelumnya.

1. Operasi Skalar Persegi Ajaib

Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah persegi ajaib berorder-n dan u sembarang bilangan. Jumlahan skalar A dengan bilangan u ditulis $A + u$ atau $u + A$ adalah persegi dengan elemen-elemen $[a_{ij} + u]$ untuk semua $i, j = 1, \ldots. n$. Sedangkan perkalian skalar A dengan bilangan u ditulis Au atau uA adalah persegi dengan elemen-elemen $[ua_{ij}]$.

Operasi skalar pada persegi ajaib tidak mengubah sifat ajaib persegi, kecuali yang berubah adalah jumlah ajaibnya.

2. Konstruksi Strachey

Strachey (1918) mengemukakan suatu teorema keberadaan persegi ajaib berdasarkan persegi ajaib lain yang berorder lebih besar dari sebelumnya. Pengkonstruksian persegi ajaib ini didasarkan pada penambahan operasi penjumlahan skalar persegi ajaib.

Misalkan M himpunan semua bilangan bulat n sedemikian hingga ada persegi ajaib berorder n.

Teorema 1: (Strachey)

Jika $u \in M$, u ganjil maka $2u \in M$.

Bukti:

Misalkan A adalah persegi ajaib berorder $u = 2m + 1$, $m > 1$.

Maka bilangan ajaib untuk persegi A adalah $\left(\frac{1+u^2}{2}\right)\cdot\frac{u^2}{u} = \frac{u^3+u}{2}$.

Bilangan ajaib yang dibutuhkan pada persegi ajaib berorder-$2u$ adalah $\frac{(2u)^3+2u}{2} = 4u^3 + u$.

Persegi ajaib berorder $2u$ dari A dapat dikonstruksi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1:

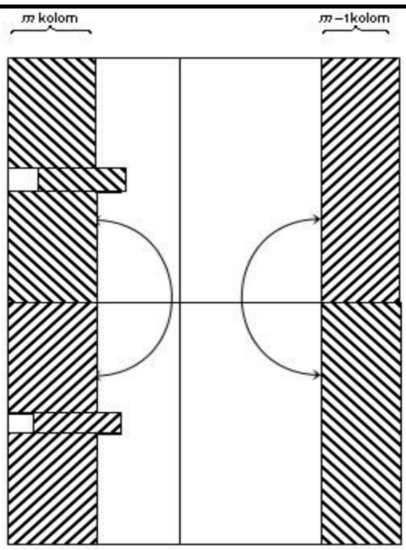
Susunlah bilangan-bilangan dalam bentuk persegi dalam empat blok area seperti dalam gambar 4.1 dibawah ini

A	$A + 2u^2$
$A + 3u^2$	$A + u^2$

Gambar 4.1

Langkah 2:

Lakukan perubahan persegi pada gambar 4.1 dengan mempertukarkan elemen-elemen yang seletak pada blok atas dengan blok bawah yang terarsir seperti pada gambar 4.2 di bawah ini. Sementara itu bilangan-bilangan pada baris atau kolom yang tidak terarsir biarkan tetap pada posisi semula.



Gambar 4.2

Analisis Kolom:

- Pada gambar 3.1, jumlah elemen-elemen pada setiap kolom ke-1 sampai kolom ke-u adalah $\frac{u^3+u}{2} + \left(\frac{u^3+u}{2} + u \cdot u^2\right) = 4u^3 + u$.
- Sedangkan jumlah elemen-elemen pada setiap kolom ke-(u+1) sampai kolom ke-u^2 adalah ($\frac{u^3+u}{2}$ + $u \cdot 2u^2$) + ($\frac{u^3+u}{2}$ + $u \cdot u^2$) = $4u^3 + u$.

  Pada langkah 1 di atas terlihat bahwa jumlah elemen-elemen pada setiap kolom memenuhi jumlah bilangan ajaib yang diinginkan.

Analisis Baris:

- Adanya pertukaran elemen-elemen pada langkah 2 di atas tidak mengakibatkan terjadinya perubahan jumlahan pada setiap kolom, sehingga jumlah bilangan-bilangan pada sembarang kolom adalah tetap.
- Jumlah elemen-elemen pada baris ke-1 hingga baris ke-u adalah

  $\{½(u^3 + u) + m \cdot 3u^2\} + \{½(u^3 + u) + (m + 1) \cdot 2u^2 + (m - 1) \cdot u^2\} = 4u^3 + u.$
- Jumlah elemen-elemen pada baris ke-(u + 1) hingga baris ke-2u adalah

  $\{½(u^3 + u) + (m + 1) \cdot 3u^2\} + \{½(u^3 + u) + (m + 1) \cdot u^2 + (m - 1) \cdot 2u^2\} = 4u^3 + u.$

  Pada langkah 2 di atas terlihat bahwa jumlah elemen-elemen pada setiap kolom dan setiap baris memenuhi jumlah bilangan ajaib yang diinginkan.

Analisis Diagonal:

- Pada langkah 2 jumlah elemen-elemen diagonal utama adalah $\{½(u^3 + u) + (m + 1) \cdot 3u^2\} + \{½(u^3 + u) + (m + 2) \cdot u^2 + (m - 1) \cdot 2u^2\} = 4u^3 + u$.
- Sedangkan jumlah elemen-elemen diagonal kedua pada langkah ke-2 adalah

  $\{½(u^3 + u) + m \cdot 3u^2\} + \{½(u^3 + u) + (m + 2) \cdot 2u^2 + (m - 1) \cdot u^2\} = 4u^3 + u.$

Dengan demikian persegi yang telah dikonstruksi dengan langkah 1 dan langkah 2 di atas menghasilkan persegi ajaib berorder-2u. ■

Contoh :

Ambil persegi ajaib berorder $u = 5$, maka $10 \in M$.
Bukti:
Misalkan dengan metoda De La Loubére diperoleh persegi ajaib

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 4.3.

Langkah 1:
Buatlah persegi dengan memodifikasi dari persegi pada gambar 4.3 hingga dihasilkan persegi pada gambar 4.4. berikut:

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Gambar 4.4

Langkah 2 :
Lakukan pertukaran elemen-elemen pada arsiran blok atas dengan blok bawah diperoleh persegi ajaib berorder 10 dengan bilangan ajaib = $4u^3 + u = 4\times5^3 + 5 = 505$ yaitu

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Gambar 4.5

3. Konstruksi Perkalian

Sebagai hasil dari keberadaan teorema 1 adalah semua bilangan genap yang mempunyai faktor ganjil pasti merupakan order persegi ajaib. Tetapi bilangan genap yang tidak mempunyai faktor ganjil harus dilakukan penyelidikan lebih lanjut. Untuk itu berikut ini dikemukakan operasi perkalian persegi yang akan dipergunakan untuk membangkitkan persegi ajaib dengan order lebih besar.

Misalkan $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ adalah persegi ajaib berorder m dan jumlahan ajaib $\alpha = m(m^2 + 1)/2$, dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ persegi ajaib berorder n dengan jumlahan ajaib $\beta = n(n^2 + 1)/2$. Perkalian dua persegi $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ ditulis $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ adalah persegi berorder-mn yang berbentuk

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ keduanya adalah persegi ajaib maka jelas bahwa $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ merupakan persegi ajaib juga yang berorder-mn dengan jumlahan ajaib $\alpha\beta$. Hal ini secara formal dinyatakan dlam teorema berikut

Teorema 2:

Jika $m, n \in M$, maka $mn \in M$.

Bukti :

Jelas bahwa jumlahan semua elemen dalam tiap baris, kolom, atau diagonal adalah sama yaitu sebesar $\alpha\beta = \{m(m^2 + 1)/2\}\{n(n^2 + 1)/2\} = mn(m^2 + 1)(n^2 + 1)/4$ ■

Catatan :

Perkalian dua persegi ajaib tidak bersifat komutatif. Mesklipun keduanya menghasilkan persegi ajaib juga tetapi mungkin hasil kali $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$ dalam arti bentuk susunannya.

Contoh

Jika

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$ Maka $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} =$

128	24	16	104	16	3	2	13	96	18	12	78
40	80	88	64	5	10	11	8	30	60	66	48
72	48	56	96	9	6	7	12	54	36	42	72
32	120	112	8	4	15	14	1	24	90	84	6
48	9	6	39	80	15	10	65	112	21	14	91
15	30	33	24	25	50	55	40	35	70	77	56
27	18	21	36	45	30	35	60	63	42	49	84
12	45	42	3	20	75	70	5	28	105	98	7
64	12	8	52	144	27	18	117	32	6	4	26
20	40	44	32	45	90	99	72	10	20	22	16
36	24	28	48	81	54	63	108	18	12	14	24
16	60	56	4	36	135	126	9	8	30	28	2

Dengan berbekal informasi yang tertuang baik dalam bentuk observasi konstruksi maupun teorema formal, penelitian ini bermaksud mencoba mencari pembenaran bahwa untuk sembarang $n \in$ N, maka ada persegi ajaib berorder-n dengan satu perkecualian untuk $n \neq 2$. Hal ini secara formal diberikan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 3 :

Untuk sembarang $n \in$ N, $n \neq 2$ maka ada persegi ajaib berorder-n.

Bukti:

Misalkan M adalah himpunan bilangan-bilangan asli n untuk mana ada persegi ajaib berorder-n. Misalkan pula himpunan bilangan asli dipartisi menurut kongruensi bilangan modulo 4, sehingga setiap bilangan asli n akan kongruen dengan salah satu dari bilangan-bilangan 0, 1, 2, atau 3.

Dari survey dan penjelasan teorema sebelumnya diperoleh informasi bahwa

1). 1, 3, 4, 5, 6, 8 $\in$ M (Dekomposisi Persegi latin dan konstruksi Benjamin Franklin)

2). $2n + 1 \in$ M, untuk semua n (Konstruksi De La Loubére)

3). $2(2n + 1) = 4n + 2 \in$ M untuk semua n (konstruksi Strachey)

4). Jika $m, n \in$ M, maka $mn \in$ M (konstruksi perkalian)

a. Dari hasil 2). diketahui bahwa semua bilangan ganjil merupakan bilangan anggota M, sedangkan bilangan ganjil adalah kongruen dengan bilangan 1 atau 3 modulo 4. Jadi $n \in$ M untuk semua $n \equiv 1, 3 \pmod 4$.

b. Dari hasil 3). diperoleh kesimpulan $n \in$ M, untuk semua $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \neq 2$. Sehingga jika digabung dengan a. diperoleh kesimpulan $n \in$ M untuk semua $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$.

c. Andaikan $n \equiv 0 \pmod 4$, $n \neq 0$. Maka $n = 4k = 4^p q$, $q \neq 0 \pmod 4$, $q > 2$. Menurut hasil b. haruslah $q \in$ M. Sedangkan berdasarkan hasil survey 1) dan 4) maka haruslah $4^p \in$ M. Dan sekali lagi menurut hasil 4) maka haruslah $n = 4^p q \in$ M.

Dengan demikian terbukti bahwa semua bilangan asli n kecuali 2 ada persegi ajaib berorder-n.

5. Penutup

Penelitian ini telah berhasil mengobservasi keberadaan persegi ajaib pada order n sembarang dan $n \neq 2$. Namun metoda yang telah dibahas hanya berlaku untuk persegi ajaib baku. Ini berarti upaya mengeneralisasikan suatu metoda konstruksi dapat dilanjutklan lagi. Pembaca yang berminat bisa melakukan penelitian serupa yang ditekankan pada keberadaan persegi ajaib yang melibatkan elemen-elemen lebih umum lagi. Menarik dipelajari pada kasus barisan geometri atau barisan dengan komposisi tertentu.

Suatu permasalahan terbuka adalah

1. Jika diberikan n^2 bilangan bulat yang berbeda secara sembarang tanpa diberikan pola, dapatkah mengkonstruksi persegi ajaib?
2. Jika ada, sampai tingkat/order berapa persegi itu dapat dikonstruksi?
3. Jika tidak ada, dengan mengurangi peryaratan ajaib seperti pada kasus persegi semi magic, dapatkah persegi ajaib dikonstruksi? Sampai order berapa?

Daftar Pustaka

Andrew, W. S. (1917). *Magic Squares and Cubes*. Open Court Pub. Co. Chicago.

Andrew, W. S., Sayles. (1913). *The Monist 23, No. 4,*.

Andrews, W.S. (1960). *Magic Squares and Cubes*, Dover.

Benson, W. H., Jacoby, O,. (1976). *New Recreation with Magic Squares*. Dover Publication. New York.

Cahyono, H. (2004). *Formula Analitik Konstruksi Persegi Ajaib*. Laporan Penelitian. DPP UMM. Malang

Cazalas, E. (1934). *Carres Magiques Au Degre n*. Series Numerales de G. Tary. Paris.

Chebrakov, Y. V. (2000). *Smarandache Notions Journals*. Vol !!. (1-2-3) 144

Chebrakov, Y. V., Shmagin, V. V. (1997). *Smarandache Notions Journals, Vol 8. (1-2-3) 62*

Denes, J., Keedwell, A. D. (1991). *Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications*. North-Holland. Amsterdam.

Hilliard, J.N.. Kaufman and Greenberg. (1994). *Greater Magic*

Kreher, Donald L. (2004). http://www.math.mtu.edu/~kreher/ABOUTME/talks/magicsquares.pdf

Laywine, C.F. and G.L. Mullen. (1998). *Discrete Mathematics Using Latin Squares*.

Lindner, C.C. and C.A. Rodger. (1977). *Design Theory*, CRC press.

Rouse Ball, W.W. and H. S. M. Coxeter Dover. (1987). *Mathematical Recreations and Essays*

Smarandache,F. *Paradoxist Mathematics*, http://www.gallup.unm.edu/~smarandache