PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

Mohammad Jamhuri
Jurusan Matematika FSAINTEK, Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Jl. Gajayana No 50 Malang
m.jamhuri@live.com

Abstrak

Di dalam artikel ini akan dijelaskan sebuah pendekatan numerik untuk penyelesaian persamaan differensial biasa (PDB) yang di dasarkan pada pendekatan suatu fungsi dan turunannya dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis. Solusi dari persamaan tersebut, diperoleh dengan cara mengganti fungsi dan fungsi turunannya dengan sebuah fungsi pendekatan menggunakan jaringan fungsi radial basis (radial basis function). Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode yang diusulkan ini,lebih baikkualitasnya jika dibandingkan dengan solusi yang diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Kelebihan dari metode ini adalah setiap fungsi dan turunannya dapat di dekati secara langsung dengan sebuah fungsi basis, sehingga untuk memperoleh solusi tidak diperlukan nilai awal.Hal ini selangkah lebih maju jika dibandingkan dengan metode-metode konvensional yang selalu memerlukan nilai awal. Disamping itu, jumlah komputasi yang di perlukan juga jauh lebih sedikit jika dibandingkan dengan jumlah komputasi pada metode-metode konvensional.

Kata kunci : P*enyelesaian Numerik, Persamaan Differensial, Jaringan Syaraf Tiruan, Fungsi Radial Basis, RBF.*

Abstract

In this article will describe a numerical approach to the completion of ordinary differential equations (PDB), which is based on the approach of a function and its derivatives using radial basis function network. The solution of the equation, is obtained by replacing the function and its derivative function with a function approach uses radial basis function network (radial basis function). The results obtained using the proposed method, the more better quality when compared to solutions obtained using the Runge-Kutta method of order-4. The advantage of this method is that every function and its derivatives can be approached directly by a function of the base, so it as to obtain the initial value of the solution is not required. It is a step forward when compared to conventional methods always require an initial value. In addition, the amount of computing that need is also far less if compared to the amount of computing on conventional methods.

Keywords: *Numerical Resolution, Differential Equations, Neural Network, Radial Basis Function, RBF.*

1. Pendahuluan

Solusi dari persamaan differensial biasa secara umum sulit di peroleh dengan cara analitik, sedangkan metode-metode numerik yang sudah ada, seperti metode Euler, Adam-Basforth, Bulirsch-Stoer, Runge-Kutta, dsb, dapat menyebabkan akumulasi kesalahan (*error*) yang sangat besar. Hal tersebut disebabkan oleh adanya proses yang tak linier (Press dan Flannery, 1998; Zwillinger, 1997). Sehingga untuk meminimumkan kesalahan, di sarankan agar penyelesaian persamaan-persamaan differensial yang tak linier dianalisis dengan menggunakan jaringan syaraf tiruan (Balasubraniam, 2008) karena jaringan syaraf tiruan merupakan salah satu alat yang sangat baik untuk mengaproksimasi fungsi dan turunan-turunannya baik yang linier maupun yang tak linier (May-Duy dan tran-Cong, 1999; Park, 1991). Di samping itujaringan syaraf tiruan dapat menyelesaikan permasalahan yang hanya bisa diketahui input dan outputnya saja (*blackbox*), sedangkan proses yang terjadi antara input dan output tetap menjadi sebuah misteri (Fausett, 1994).

Algoritma jaringan saraf tiruan dimodelkan seperti jaringan saraf pada makhluk hidup, yaitu unit-unit yang saling terhubung satu sama lain, dan dikelompokkan menjadi *layer-layer*. Jaringan saraf tiruan biasanya terdiri dari unit-unit input, unit-unit output, dan unit-unit pada *hidden layer*. Input merepresentasikan input yang akan diolah, dan output merepresentasikan fungsi target yang akan menjadi keluaran. masing-masing unit merupakan sebuah fungsi yang menerima *n* buah masukan dan mengeluarkan sebuah nilai. Nilai tersebut merupakan hasil perhitungan, sesuai dengan jenis unit (misalnya *sigmoid*,*perceptron*atau *radial basis*) dan memperhitungkan nilai masukan dan bobot masing-masing nilai masukan (Fausett, 1994). Pembelajaran pada jaringan saraf tiruan dilakukan dengan cara mencari bobot yang sesuai untuk masing-masing jalur antara unit pada layer tertentu dengan unit pada layer lainnya, sehingga dengan bobot tersebut jaringan saraf tiruan dapat mewakili fungsi target yang ingin dicapai (Fausett, 1994). Performansi jaringan saraf tiruan hasil pelatihan dapat diukur berdasarkan ketepatan penilaian yang dihasilkan jaringan saraf tiruan dibandingkan dengan penilaian yang berasal dari manusia.

Dalam artikel ini untuk menganalisis solusi dari persamaan differensial akan digunakan salah satu model jaringan syaraf tiruan yang mampu mendekati sebuah fungsi dan turunannya serta dapat menyelesaikan permasalahan tak linier dengan cara yang linier (Fausett, 1994), yaitu jaringan fungsi radial basis (*radial basis function networks*) yang selanjutnya akan disebut sebagai jaringan RBF.

2. Metode Penelitian

Pada bagian ini akan dijelaskan cara untuk memperoleh solusi dari persamaan differensial biasa dengan metode yang diusulkan.

Persamaan Differensial Biasa Taklinier

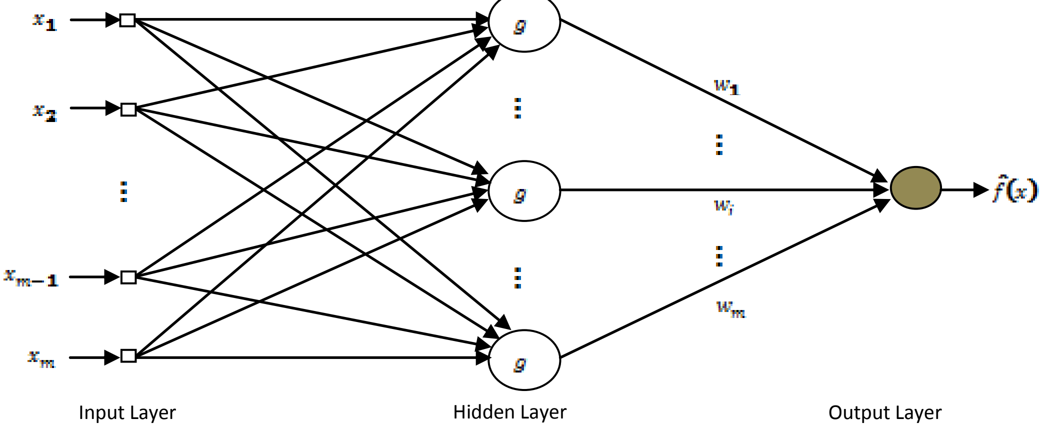
Model persamaan differensial biasa tak linier secara umum adalah sebagai berikut:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{2.1}$$

Dengan $a(x) \neq 0$.

Aproksimasi Fungsi dengan RBF

Aproksimasi fungsi dengan menggunakan jaringan RBF menjelaskan prilaku dari sebuah fungsi yang sangat rumit dan mengubahnya menjadi sebuah fungsi yang sederhana seperti pada gambar 1 berikut ini :



Gambar 2.1: Jaringan Fungsi Radial Basis

Fungsi pendekatan dari $f(x)$ yang dilambangkan dengan $\hat{f}(x)$ dapat direpresentasikan dengan sebuah jaringan RBF sebagai berikut:

$$\hat{f}(x_i) \simeq \sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij}) \tag{2.2}$$

Dimana x_i adalah input, $j = 1,\ldots,m$ dengan n adalah banyaknya titik target, m adalah banyaknya titik pelatihan, $g(r_{ij})$ adalah himpunan dari jaringan-jaringan RBF, w_j adalah himpunan dari jaringan bobot yang harus di cari nilainya, dan $r(ij)$ adalah norm Euclid $r_{ij} = \left\| x_i - x_j \right\|$.

Tiga diantara fungsi radial basis yang paling banyak digunakan adalah:

1. *Gaussian*

$$g(r_j) = \exp\left(-\frac{r_j^2}{a_j^2} \right), \quad a > 0 \tag{2.3}$$

2. *Multiquadric*

$$g(r_j) = \sqrt{r_j^2 + a_j^2}, \quad a > 0 \tag{2.4}$$

3. *Invers Multiquadric*

$$g(r_j) = \frac{1}{\sqrt{r_j^2 + a_j^2}}, \quad a > 0 \tag{2.5}$$

Dimana $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ adalah himpunan dari pusat RBF dan $\{a_j\}_{j=1}^{m}$ adalah himpunan varians dari RBF.Untuk menjaga desain dari jaringan RBF tetap sederhana, pusat-pusat dan lebar dari RBF di dalam jaringan (2) harus dipilih dengan tepat.Karena secara umum *performance* dari jaringan RBF sangat tergantung pada himpunan pusat dan lebar yang dipilih. Nilai dari varians RBF yang terlalu kecil atau terlalu besar akan membuat respon dari neuron menjadi sangat lamban atau menjadi tidak akurat. Dalam kajian terdahulu lebar dari RBF ke-j ditentukan dengan menggunakan relasi sebagaimana berikut ini:

$$a_j = \beta d_j \tag{2.6}$$

Dengan β adalah factor pengali, dan $\beta > 0$, dan d_j adalah jarak dari pusat ke-j terhadap pusat terdekat. Dengan memberikan himpunan-himpunan input $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ dan output $\{y_j\}_{j=1}^{m}$ dimana m adalah banyaknya titik-titik kolokasi, himpunan dari jaringan bobot $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ dapat diperoleh dengan menggunakan metode *General Linear Least Square.*

Turunan Fungsi dengan Metode RBFN

Turunan dari fungsi radial basis adalah kombinasi linier dari turunan fungsi-fungsi basisnya. Turunan parsial dari (2) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_j \ldots \partial x_1} = f_{,j\ldots 1}(x) = \sum_{i=1}^{m} w^{(i)} \frac{\partial^k g^i}{\partial x_j \ldots \partial x_1}.$$

$$\hat{f}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij}) \tag{2.7}$$

Dimana $\frac{\partial^k g^{(i)}}{\partial x_j \ldots \partial x_1}$ adalah fungsi basis yang sesuai untuk fungsi turunan $f_{,j\ldots 1(x)}$, yang diperoleh dengan menurunkan fungsi basis $g^{(i)}(x)$ yang *continue* dan *differentiable*. Sebagai contoh, ambil turunan pertama dari fungsi $f(x)$terhadap x_j, dinotasikan dengan $f_{,j}$, fungsi basis yang bersesuaian di peroleh secara analitik sebagai berikut:

1. Untuk *multiquadrics*

$$h(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{x_j - c_j^{(i)}}{(r^2 + a^{(i)2})^{0.5}}. \tag{2.8}$$

2. Untuk inverse multiquadrics

$$h(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = -\frac{x_j - c_j^{(i)}}{\left(r^2 + a^{((i))2}\right)^{1.5}}. \tag{2.9}$$

3. Untuk *Gaussians*

$$h(x) = \frac{\partial g^{(i)}}{\partial x_j} = -\frac{2\left(x_j - c_j^{(i)}\right)}{a^{(i)2}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^{(i)2}}\right) \quad (2.10)$$

Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial menggunakan RBF

Dalam artikel ini, dikembangkan sebuah metode pendekatan untuk penyelesaian persamaan differensial yang didasarkan pada jaringan RBF.Metode yang diusulkan ini dimulai dengan mengganti setiap fungsi dan fungsi turunannya dengan jaringan RBF pada persamaan (2). Selanjutnya persamaan baru yang diperoleh digunakan untuk mencari vector bobot w dengan menggunakan metode *General Linear Least Squares*, jika persamaannya linier, dan dengan menggunakan metode dalam (Aslam dan Waseem, 2009; Freudensten, 1963), jika persamaannya nonlinier.

Untuk lebih detilnya, misalkan diberikan sebuah persamaan differensial dari persamaan (1) sebagai berikut:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

$$x_1 \le x \le x_n$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2) dan persamaan (7) ke dalam persamaan (1) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} w_j h(r_j) = a(x)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij})\right)^2 + b(x)\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij}) + c(x) \quad (2.11)$$

Atau,

$$\sum_{j=1}^{n} w_j h(r_j) - a(x)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij})\right)^2 - b(x)\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij}) = c(x) \quad (2.12)$$

Untuk $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m]^T$, maka persamaan (11) dapat di jabarkan menjadi

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} w_j h(r_{1j}) - a(x_1)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{1j})\right)^2 - b(x_1)\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{1j}) = c(x_1) \\
&\sum_{j=1}^{n} w_j h(r_{2j}) - a(x_2)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{2j})\right)^2 - b(x_2)\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{2j}) = c(x_1) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\sum_{j=1}^{n} w_j h(r_{mj}) - a(x_m)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{mj})\right)^2 - b(x_m)\sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{mj}) = c(x_m)
\end{aligned} \quad (2.13)$$

System persamaan dalam (13) dapat diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian system persamaan nonlinier dalam (Aslam dan Waseem, 2009; Freudensten, 1963) akan di peroleh vector $w = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]^T$ yang merupakan vector pembobot untuk jaringan pada (2) dan (7). Selanjutnya solusi umum dari persamaan (1) dapat diperoleh menggunakan persamaan (2), yaitu:

$$y_i \simeq \sum_{j=1}^{n} w_j g(r_{ij}) \blacksquare$$

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta dikenal sebagai salah satu metode konvensional yang sangat baik untuk penyelesaian masalah pada persamaan differensial biasa. Bentuk dari metode Runge-Kutta orde-4 adalah sebagai berikut

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$
$$k_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3)$$
$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.14)$$

Dalam artikel ini metode Runge-Kutta akan dijadikan sebagai pembanding untuk metode yang diusulkan dalam paper ini.

3. Pembahasan

Dalam bagian ini akan di bahas hasil simulasi dan penyelesaian dari beberapa persamaan differensial dengan menggunakan metode yang diusulkan.

Percobaan Numerik

Untuk mengetahui kevalidan dan keefektifan dari metode yang diusulkan, dalam bagian ini akan diberikan dua contoh penyelesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan metode yang ditawarkan serta akan dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode-metode lainnya.

Contoh 1:

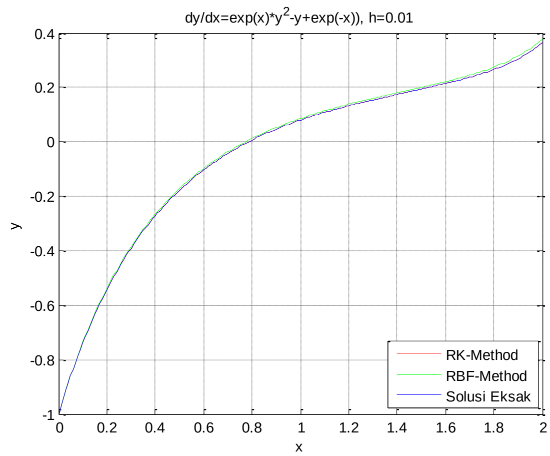
Ambil persamaan differensial biasa taklinier sebagai berikut:

$$y' = e^x y^2 - y + e^{-x} \qquad (2.15)$$

Dari [2.11] didapat solusi analitik sebagai berikut:

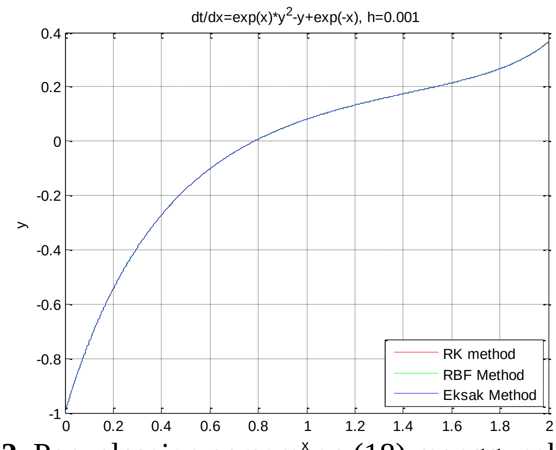
$$y(x) = -e^{-x}\left(\frac{\cos(x) - C\sin(x)}{\sin(x) + C\cos(x)}\right) \qquad (2.16)$$

Pada gambar (2) berikut ini dapat dilihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan jaringan RBF dengan menggunakan $\Delta x = 0.01$ hampir menyamai dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode Runge-kutta dan solusi eksaknya.



Gambar 3.1. Penyelesaian persamaan (18) menggunakan $\Delta x = 0.1$

Berikutnya metode jaringan RBF akan diterpakan pada permasalahan yang sama tetapi dengan $\Delta x = 0.001$, hasil yang diperoleh dapat dilihat pada gambar (3.2) berikut ini:



Gambar 3.2. Penyelesaian persamaan (18) menggunakan $\Delta x = 0.05$

Dengan menggunakan $\Delta x = 0.001$ hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode jaringan RBF dan metode Runge-Kutta memberikan hasil yang sangat baik dan hampir tidak kelihatan perbedaan diantara ketiganya. Secara lebih detil dapat perbedaan hasil *sum square of error* dari dua metode yang digunakan untuk penyelesaian persamaan (2.15) dapat dilihat pada table berikut ini.

Tabel 3.1. Perbandingan Sum Square Of Error (SSE) antara metode Runge-Kutta dan RBF untuk menyelesaikan persamaan (18)

Δx	Multiquadrik	Gaussian	Invers Multiquadrik
0.1	0.1233	0.1233	0.1233
0.05	0.0501	0.0501	0.0501
0.01	0.0086	0.0086	0.0086
0.005	0.0042	0.0042	0.0042
0.001	8.3393e-004	8.3375e-004	8.3393e-004

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa selisih antara jaringan RBF dan metode Runge-Kutta untuk penyelesaian persamaan differensial biasa taklinier (18) tidak terdapat perbedaan yang berarti jika dilihat pada jumlah kuadrat kesalahannya.Tetapi dari segi kecepatan metode RBF dapat memberikan waktu yang lebih pendek jika dibandingkan dengan metode Runge-Kutta.Perbandingan kecepatan antara metode jaringan RBF dan Runge-Kutta dapat dilihat pada table 3.2 berikut ini.

Tabel 3.2. Perbandingan kecepatan antara metode jaringan RBF dan Runge-Kutta

Metode	Δx	Fungsi aktivasi	Waktu (detik)
Runge-Kutta	0.1		3.5879e-007
RBF		Multikuadrik	1.8522e-007
Runge-Kutta	0.01		3.2523e-006
RBF		Multikuadrik	1.7358e-007
Runge-Kutta	0.001		
RBF		Multikuadrik	

4. Kesimpulan

Dengan menggunakan jaringan RBF pada penyelesaian persamaan differensial terdapat beberapa kelebihan yaitu: (1) solusi persamaan differensial dengan jaringan RBF bisa diperoleh tanpa memberikan nilai awal. (2) solusi yang diperoleh kualitasnya jauh lebih baik daripada solusi yang di peroleh dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk Δx yang sama. (3) jaringan RBF tetap dapat memberikan solusi yang baik meskipun $\Delta x > 1$. (4) kualitas solusi yang diperoleh tidak tergantung pada nilai Δx tetapi tergantung pada banyaknya titik-titik atau pias x_i yang akan di cari solusinya. semakin banyak jumlah titik yang akan dicari solusinya, semakin baik hasilnya. Terbukti dari simulasi bahwa jaringan RBF sangat baik digunakan untuk mencari solusi dari persamaan differensial.

Daftar Pustaka

Aslam, Noor., and Waseem, M. Some Iterative Methods for Solving a System of Nonlinear Equation. *Elsevier: Journal of Computer and Mathematics with Application*. 57. 2009. pp. 101-106.

Balasubraniam P, Kumaresan N,. 2008. “Solution of generalized matrix Riccati differential equation for indefinite sthocastic linear quadratic singular system using neural network”. Elsevier: *Applied Mathematical Modelling 204.* hal. 671-679.

Chapra, S.C dan Canale, R.P. *Numerical Methods for Engineer*. 4th edition. Mc Graw Hill. New York.

F. Freudensten, B. Roth. Numerical solution of System of Nonlinear Equation. J. ACM 10 (1963) 550-556.

Fausett, Laurene. 1994. Fundamental of Neural Networks: Architectures, Algorithms and Applications. Prentice Hall. New Jersey.

K.-L. Du and M.N.S. Swamy. 2006. *Neural Networks in a Softcomputing Framework.* Springer. London.

Mai-Duy, N., & Tran-Cong, T. 1999. “Approximation of function and its derivatives using radial basis function networks”. Elsevier: Applied Mathematical Modelling. vol. 27. hal. 197-220.

Park J, Sandberg I.W. 1991. “Universal Approximation Using Radial Basis Function Networks”. Massachusset Institut Technology:*Neural Computation*. vol. 3. hal. 246-257

Press WH, Flannery BP, Teukolsky SA, Vetterling WT. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing; Cambridge University Press: Cambridge. 1998.

Shu, C dan Wu, Y. L. 2007. “Integrated radial basis functions-based differential quadrature method and its performance”. Wiley InterScience: Numer. Meth Fluids. 53. Hal. 969-984.

Zwillinger, Daniel. 1997. Handbook of Differential Equation 3rd Edition. Academic press. Boston.