MODEL SPASIAL SURVIVAL WEIBULL–3P DENGAN PENDEKATAN BAYESSIAN DAN APLIKASINYA PADA WINBUGS

Diaz Fitra Aksioma
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pesantren Tinggi Darul 'Ulum (Unipdu) Jombang
Kompleks Ponpes Darul 'Ulum Rejoso Peterongan – Jombang Jatim 61481
dheaze_shaya@yahoo.co.id

Abstrak

Model survival merupakan suatu pendekatan statistika yang seringkali diaplikasikan dalam berbagai bidang, misalnya bidang kesehatan, biologi dan bahkan dalam bidang politik. Model tersebut tidak hanya digunakan untuk menentukan faktor-faktor apa saja yang dominan mempengaruhi terjadinya suatu peristiwa/event akan tetapi juga mampu mengidentifikasi factor resiko berdasarkan perubahannya terhadap waktu. Seringkali, terjadinya suatu event juga dipengaruhi oleh lokasi dimana event tersebut terjadi. Prior CAR selanjutnya digunakan untuk memunculkan autokorelasi spasial pada efek random/frailty pada model survival tersebut. Distribusi eksponensial dan weibull-2p seringkali muncul sebagai distribusi dari waktu survival pada beberapa penelitian. Penelitian ini membahas tentang bagaimana distribusi weibull-3p digunakan sebagai distribusi dari waktu survival dalam model spasial survival beserta code programnya dalam opensource WinBUGS.

Kata kunci: *model survival, event, prior CAR, frailty, weibull-3p, spasial survival dan WinBUGS.*

Abstract

Survival model is a statistical approach that is often applied in many fields, such as health, biology and even in politics. The model is not only used to determine what factors influence the predominant occurrence of an event but will also be able to identify the risk factors based on changes through time. Often, the occurrence of an event is also influenced by the location where the event occurred. Prior CAR then used to bring the effects of spatial autocorrelation in random / frailty in the survival models. Exponential distribution and Weibull-2p often occur as the distribution of survival time in some studies. This study discusses how Weibull-3p distribution is used as the distribution of the survival time and their survival in the spatial model code opensource program in WinBUGS.

Keywords: *models of survival, event, prior CAR, frailty, Weibull-3p, spatial survival and WinBUGS*

1. Pendahuluan

Model survival merupakan suatu model matematis yang seringkali diaplikasikan dalam berbagai penelitian, terutama penelitian dibidang biologi, kesehatan dan bahkan dapat pula diaplikasikan pada bidang politik. Model tersebut digunakan untuk menentukan nilai hazard atau resiko dari suatu kejadian, misalnya kemampuan bertahan seseorang terhadap suatu penyakit serta laju kesembuhan terhadap penyakit tersebut. Selain itu, model survival juga dapat digunakan untuk menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi hazard atau resiko seseorang terhadap suatu penyakit tertentu. Dalam bidang politik misalnya, hazard atau resiko tersebut dapat dikaitkan dengan waktu sejak seorang politikus duduk di kursi parlemen hingga mencapai kursi pimpinan tertinggi suatu negara atau sejak seseorang memulai karir politik hingga mencapai kursi parlemen serta faktor-faktor yang mempengaruhinya.

Model survival menurut Dohoo (2008) tidak hanya digunakan untuk melihat apakah suatu kejadian tertentu terjadi atau tidak sebagaimana yang berlaku pada model regresi logistik, akan tetapi juga dapat digunakan untuk mengidentifikasi faktor resiko kejadian tersebut serta menangani situasi ketika faktor resiko berubah terhadap waktu. Berdasarkan keterangan tersebut maka ketika seorang peneliti memiliki tujuan untuk menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya suatu hal/peristiwa berdasarkan faktor resiko kejadian tersebut terhadap waktu maka model survival merupakan suatu alat yang akan lebih memadai.

Pada kenyataannya,suatu kejadian seringkali berhubungan dengan daerah (lokasi) dimana kejadian tersebut berlangsung. Artinya, suatu kejadian mungkin saja terjadi akibat pengaruh dari lokasi/daerah tempat kejadian tersebut terjadi. Pengaruh faktor lokasi/daerah tersebut seringkali disebut sebagai faktor spasial. Faktor spasial tersebut secara umum dapat dibedakan menjadi dua yaitu faktor spasial melalui pendekatan geostatistik dan pendekatan *lattice* (Banerjee, dkk., 2003). Pendekatan geostatistik yaitu ketika faktor spasial didekati melalui lokasi geografisnya, yaitu melalui garis lintang dan bujur (*latitude* dan *longitude*) sedangkan pendekatan *lattice* yaitu ketika pengaruh spasial dari suatu kejadian didekati melalui letak/posisi daerah tempat kejadian tersebut relatif terhadap daerah yang lain dalam hal ini juga disebut sebagai *neighboring*.

Terdapat beberapa metode yang bisa digunakan untuk memberikan pengaruh spasial tersebut dalam model survival, antara lain melalui pendekatan bayesian. Menurut Banerjee, dkk (2003) pendekatan bayesian digunakan untuk memunculkan dependensi spasial pada efek random/error dari daerah-daerah yang saling berdekatan. Dependensi spasial ini kemudian dinyatakan melalui prior *conditionally autoregressive* (CAR) yang sebelumnya dikembangkan oleh Besag, York dan Mollie. Melalui prior CAR ini, autokorelasi yang semula tidak boleh ada pada efek random model survival menjadi suatu hal yang diperbolehkan. Autokorealasi spasial tersebut selanjutnya menyatakan adanya hubungan antara daerah-daerah yang saling berdekatan yang dinyatakan melalui sebuah matriks *adjacent* (matriks ketetanggan).

Banerjee, dkk (2003) menyatakan bahwa efek random spasial pertama kali ditambahkan pada model survival oleh Berry dan Star pada tahun 1990 dan 1991 yang menyatakan pembobot kebergantungan/pengaruh spasial dalam jumlah ataupun proporsi dari daerah yang saling berdekatan. Pada tahun 2003, Banerjee dkk mengembangkan model survival hierarki yang menyertakan efek random (*frailty*) pada studi kasus kematian bayi lahir di minnesota, Amerika Serikat. Pada perkembangan selanjutnya, pendekatan bayesian kemudian digunakan pada model survival dengan *frailty* hirarkhi menggunakan metode *Markov Chain Monte Carlo*

(MCMC) dengan algoritma Metropolis-Hasting (Carlin dan Louis, 2000). Darmofal (2008) mengaplikasikan model spasial survival dengan *frailty* tersebut dalam ilmu politik, yaitu memodelkan waktu hingga dikeluarkannya pengumuman tentang susunan keanggotaan parlemen dalam pemerintahan Amerika Serikat oleh NAFTA.

Keseluruhan penelitian tersebut menggunakan distribusi weibull-2p pada distribusi waktu survivalnya. Akan tetapi, tidak menutup kemungkinan jika pada suatu saat terdapat kejadian ketika distribusi waktu survival suatu kejadian adalah weibull-3p sehingga pada akhirnya memunculkan keingintahuan peneliti untuk menentukan model survival dengan *frailty* spasial menggunakan dsitribusi weibull-3p sebagai distribusi waktu survivalnya untuk selanjutnya menentukan programnya dalam *opensource* winbugs.

2. Model Survival

Model survival merupakan suatu prosedur statistik yang digunakan untuk menganalisis data waktu survival yaitu data waktu hingga suatu kejadian/*event* tertentu terjadi dan seringkali disebut sebagai *failure event* (Kleinbaum, 2005). Tiga hal yang harus diperhatikan dalam menentukan waktu survival *t*, yaitu: 1) *time origin/starting point* atau titik awal, 2) *failure time* yaitu waktu berakhirnya *failure event* dan 3) *measurement scale of time* atau skala pengukuran waktu. Dalam model survival dikenal data tersensor, yaitu ketika pengamatan terhadap waktu survival hanya sebagian atau pengamatan tidak sampai pada *failure event*. Tiga hal yang menyebabkan data tersensor, yaitu: 1) *lost of follow up* yaitu jika obyek meninggal/pindah, 2) *drop out* yaitu jika *treatment* harus dihentikan karena alasan tertentu dan 3) *termination of study* yaitu jika masa penelitian berakhir sebelum mencapai *failure event*.

Model survival digunakan untuk menjelaskan bagaimana *hazard* (resiko) terjadinya suatu *event*/peristiwa tertentu pada suatu waktu tertentu dipengaruhi oleh beberapa faktor (Darmofal, 2008). Pada kejadian tunggal, *hazard rate* dinyatakan sebagai resiko sesaat suatu obyek pada suatu waktu tertentu yang mampu bertahan, yaitu tidak mengalami *failure event* hingga waktu berakhir. Dalam model survival, yang penting untuk diingat adalah bagaimana *baseline hazard* di ukur. *Baseline hazard* dinyatakan sebagai resiko terjadinya suatu *event* tanpa mempertimbangkan adanya efek faktor-faktor yang lain.

Fungsi survival merupakan peluang seorang individu untuk bertahan lebih lama dari suatu waktu *t* sedangkan fungsi hazardnya merupakan reaksi sesaat ketika terjadi *event* pada waktu ke-*t*. Kleinbaum (2005) juga menyatakan bahwa fungsi hazard menaksir peluang obyek mengalami *event* pada waktu ke-*t*. Nilai prediktor (faktor-faktor yang berpengaruh) pada model hazard proporsional dinyatakan oleh vektor **x**, dimana $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$, fungsi *baseline hazard* dinyatakan sebagai $h_0(t)$ yang merupakan hazard tiap individu ketika vektor **x** bernilai **0** sehingga model hazard proporsional diberikan dalam persamaan (1) berikut ini.

$$h(t) = h_0(t) exp(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}) \qquad (1)$$

3. Model Spasial Survival

Time-to-event data atau data waktu hingga terjadinya suatu event menurut Banerjee, dkk (2003) seringkali dikelompokkan dalam strata /kelompok-

kelompok seperti wilayah geografis atau daerah bencana. Pada keadaan tersebut, pendekatan hierarki melalui *stratum-specific frailties* seringkali cocok. Hal tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Vaupel dkk (1979) dalam Banerjee dkk (2003) dimana terdapat *mixed model* dengan *frailty* mewakili status tiap kelompok.

Dalam model parametrik weibull-2p, *hazard rate* diberikan melalui persamaan (2) berikut,

$$h\left(t_{ij};\mathbf{x}_{ij}\right)=\rho t_{ij}^{\rho-1}\, exp\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{ij}\right) \quad (2)$$

sedangkan pada model yang menyertakan *frailty*, persamaan (2) diperluas menjadi persamaan (3),

$$h\left(t_{ij};\mathbf{x}_{ij}\right)=\rho t_{ij}^{\rho-1}\, exp\left(\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{ij}+\mathbf{W}_i\right) \quad (3)$$

dimana j ($j=1,2,\cdots,n_i$) merupakan waktu hingga *event* terjadi, i ($i=1,2,\cdots,I$) merupakan banyaknya strata/kelompok, t_{ij} merupakan waktu kejadian/event, $\mathbf{x}_{ij}$ menyatakan vektor kovariat, ρ merupakan parameter bentuk *baseline hazard* dan $\boldsymbol{\beta}$ memiliki intersep (Wall, 2004). Parameter ρ menyatakan bentuk *hazard rate* dalam model weibull. *Hazard rate* monoton naik dinyatakan $\rho>1$ dan sebaliknya $\rho<1$ menyatakan *hazard rate* monoton turun, sedangkan $\rho=1$ menyatakan *hazard* konstan/datar (Box dan Jones, 2004 dalam Darmofal, 2008).

Pada pendekatan spasial survival, model dibentuk melalui data survival yang tersusun berdasarkan daerah yang saling berdekatan yang berarti bahwa *frailties* $\mathbf{W}_i$ dari daerah yang saling berdekatan menggambarkan kemungkinan bahwa daerah-daerah tersebut memiliki karakteristik yang mirip (Banerjee, dkk., 2003 dan Darmofal, 2008).

4. Analisis Bayesian

Pendekatan/estimasi yang digunakan dalam statistika klasik menggunakan inferensia hanya berdasar pada data sampel dari populasi sedangkan estimasi pada pendekatan bayesian selain memanfaatkan informasi dari data sampel juga memperhitungkan penggunaan suatu distribusi awal yang disebut sebagai distribusi prior (Ntzoufras, 2009). Selain itu, parameter θ pada pendekatan statistika klasik bernilai tetap (*fixed*) sedangkan pada pendekatan bayesian merupakan variabel random yang memiliki distribusi dan disebut sebagai distribusi prior. Estimator pada pendekatan bayesian adalah mean atau modus dari distribusi posteriornya. Distribusi posterior data diberikan melalui persamaan (4) berikut ini (Congdon, 2003),

$$p(\theta\,|\,x)=\frac{l(x\,|\,\theta)p(\theta)}{p(x)} \quad (4)$$

dimana $p(\theta\,|\,x)$ merupakan dsitribusi posterior data, $p(\theta)$ merupakan dsitribusi prior parameter θ data dan $l(x\,|\,\theta)$ merupakan *likelihood* data sampel sedangkan $p(x)$ adalah konstanta ternormalisasi (*normalized constant*). Secara umum posterior dinyatakan dalam persamaan (5) berikut,

$$p(\theta\,|\,x) \;\propto\; l(x\,|\,\theta)p(\theta) \quad (5)$$

5. *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC)

Markov chain monte carlo (MCMC) menurut Ntzoufras (2009) merupakan suatu pendekatan numerik untuk mengatasi kesulitan penentuan marginal posterior parameter, dimana diperlukan suatu proses integrasi yang sangat rumit dan cukup lama. MCMC pertama kali diperkenalkan dalam ilmu fisika oleh Metropolis dan publikasi yang mencakup generalisasi dari algoritma Metropolis oleh Hastings pada tahun 1970 dan selanjutnya diberikan penambahan *gibbs sampling* oleh Geman pada 1984. MCMC digunakan kembali oleh statistisi seperti Tanner dan Wong pada tahun 1987 serta Gelfand dan Smith pada tahun 1990 yang kemudian menjadi alat komputasi utama pada inferensi statistika modern.

Ntzoufras (2009) menyatakan bahwa teknik MCMC dilakukan berdasarkan pada penyusunan *Markov Chain* yang konvergen secara cepat (stasioner/ *equilibrium*) pada distribusi target/distribusi posterior $p(\theta \mid x)$ yang merupakan pembeda utama MCMC dari metode simulasi lainnya. MCMC membangkitkan data sampel parameter θ yang memiliki distribusi tertentu melalui *gibbs sampling*. Langkah terakhir yaitu iterasi (*iterative methods*) dimana nilai setiap langkah bergantung pada satu langkah sebelumnya.

6. Pembobot Spasial

Ketika berbicara tentang matriks ketetanggaan (*adjacent*), pembobot spasial dari daerah-daerah yang saling bersinggungan dinyatakan melalui indeks diskret (Banerjee, dkk., 2003). Terdapat beberapa metode yang mendefinisikan hubungan kebersinggungan (*contiguity*) antar daerah (Aksioma dan Iriawan, 2010) antara lain: 1) *linear contiguity* merupakan persinggungan tepi kiri dan kanan, yaitu w_{ij}=1 jika daerah j berada di tepi kiri maupun kanan daerah i dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya, 2) *rook contiguity* yaitu kebersinggungan sisi dimana w_{ij}=1 jika daerah i dan j saling bersisian dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya, 3) *bishop contiguity* yaitu kebersinggungan sudut dimana w_{ij}=1 jika sudut dari daerah i dan j saling bertemu dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya, 4) *double linear contiguity* yaitu kebersinggungan dua tepi yaitu tepi kiri, kanan, atas dan bawah dimana w_{ij}=1 jika daerah j berada di tepi kiri, kanan, atas dan bawah daerah i dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya, 5) *double rook contiguity* yaitu kebersinggungan dua sisi dimana w_{ij}=1 jika daerah i dan j saling bersisian dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya dan 6) *queen contiguity* yaitu gabungan dari persinggungan sisi dan sudut dimana w_{ij}=1 jika daerah i dan j saling bersisian serta sudut dari daerah i dan j saling bertemu dan w_{ij}=0 untuk yang lainnya.

7. Hasil dan Pembahasan

Sebelum membentuk model spasial survival maka langkah yang harus dilakukan adalah menentukan distribusi data waktu survivalnya, yaitu distribusi dari data hingga suatu *event* terjadi. Seringkali waktu survival suatu kejadian adalah berdistribusi eksponensial ataupun weibull-2p. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai model survival dengan *frailty* spasial dimana distribusi waktu survivalnya adalah weibull-3p. Distribusi weibull 3-parameter mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (6) berikut ini.

$$f(t) = ab(t-c)^{a-1}\exp -b(t-c)^{a} \tag{6}$$

dan fungsi distribusi kumulatifnya adalah,

$$F(t)=P(T\le t)=\int_c^t ab(t-c)^{a-1}\exp -b(t-c)^a\,dt$$
$$=\int_c^t \exp -b(t-c)^a\,db(t-c)$$
$$=-\left\{\exp -b(t-c)^a\right\}\Big|_c^t$$
$$=1-\exp -b(t-c)^a \qquad ;\text{ dengan } t\ge c \text{ dan } a,b>0.$$

Parameter *a* merupakan parameter bentuk, *b* merupakan parameter skala dan *c* merupakan parameter lokasi, dimana jika *c* = 0 maka distribusinya berubah menjadi weibull-2p. Selanjutnya, setelah didapatkan fungsi distribusi kumulatifnya maka fungsi survival dari distribusi weibull-3p diberikan pada persamaan (7) berikut ini,

$$S(t)=1-F(t)=\exp -b(t-c)^a \tag{7}$$

Kemudian fungsi hazardnya adalah,

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=\frac{ab(t-c)^{a-1}\exp -b(t-c)^a}{\exp -b(t-c)^a}=ab(t-c)^{a-1} \tag{8}$$

Sehingga model weibull-3p yang terbentuk berdasarkan persamaan (2) dan persamaan (8) diberikan dalam persamaan (9) berikut ini,

$$h(t)=h_0(t)\exp\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)=ab(t-c)^{a-1} \tag{9}$$

Selanjutnya, $h_0(t)$ merupakan suatu fungsi yang nilainya bergantung pada nilai *t* sedangkan $\exp\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)$ bebas dari nilai *t* sehingga parameter *b* dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$b=\exp\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right) \tag{10}$$

dan *baseline* hazardnya $h_0(t)$ dinyatakan dalam persamaan (11) berikut ini.

$$h_0(t)=a(t-c)^{a-1} \tag{11}$$

Fungsi hazardnya kemudian dijabarkan sebagai berikut,

$$h(t)=a(t-c)^{a-1}\exp\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)$$
$$=a(t-c)^{a-1}\exp(\beta_0)\,\exp\left(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)$$
$$=\left\{a(t-c)^{a-1}\exp(\beta_0)\right\}\exp\left(\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_px_p\right)$$

Berdasarkan bentuk *full conditional distribution* (distribusi bersyarat penuh) dari masing-masing parameter *a*, *c* dan β_i maka sebelum dilakukan estimasi terhadap parameter tersebut harus ditentukan terlebih dahulu distribusi priornya yaitu sebagai berikut.

a ~ Gamma (*r*,*s*)
c ~ Normal (*r*,*s*)
β_i ~ Normal (*v*,*w*)

dimana penentuan distribusi prior tersebut dilakukan berdasarkan gabungan antara prior *conjugate* dan prior informatif.

Berdasarkan model *lattice frailty* CAR, dimana $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ menyatakan status penderita (misalnya 0 jika meninggal dan 1 jika hidup), **t** merupakan waktu hingga kematian terjadi dan **x** merupakan vektor dari kovariat, maka join distribusi posteriornya adalah sebagai berikut

$$p(\beta,\mathbf{W},a,c,\lambda|\mathbf{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}) \propto L(\beta,\mathbf{W},a,c;\mathbf{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma})p(\mathbf{W}|\lambda)p(\beta)p(a)p(c)p(\lambda) \quad (12)$$

dimana bentuk pertama pada ruas kanan merupakan likelihood untuk hazard weibull-3p, bentuk kedua merupakan join distribusi dari *frailty* acak sedangkan sisanya adalah distribusi prior tiap-tiap parameter. Fungsi likelihoodnya kemudian dijelaskan dalam persamaan (13) berikut ini.

$$L(\beta,\mathbf{W},a,c;\mathbf{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} f_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij})^{1-\gamma_{ij}} \quad (13)$$

Selanjutnya, ketika $f(t)$ dinyatakan sebagai fungsi dari $h(t)$ dikali dengan $S(t)$ maka persamaan (13) kemudian dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} L(\beta,\mathbf{W},a,c;\mathbf{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}) &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} f_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij})^{1-\gamma_{ij}} \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} \{h_{ij}(t_{ij})S_{ij}(t_{ij})\}^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij})^{1-\gamma_{ij}} \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} h_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij})^{1-\gamma_{ij}} \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} h_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij}). \end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (7) maka akan diperoleh,

$$\begin{aligned} L(\beta,\mathbf{W},a,c;\mathbf{t},\mathbf{x},\boldsymbol{\gamma}) &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} h_{ij}(t_{ij})^{\gamma_{ij}} S_{ij}(t_{ij}) \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} \left\{a(t_{ij}-c)^{a-1}\exp\left(\beta^T\mathbf{x_{ij}}+W_i\right)\right\}^{\gamma_{ij}} \exp\left\{-b(t_{ij}-c)^a\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} \left\{a(t_{ij}-c)^{a-1}\exp\left(\beta^T\mathbf{x_{ij}}+W_i\right)\right\}^{\gamma_{ij}} \exp\left\{-\left(\exp\left(\beta^T\mathbf{x_{ij}}+W_i\right)\right)(t_{ij}-c)^a\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{n_i} \left\{a(t_{ij}-c)^{a-1}\exp\left(\beta^T\mathbf{x_{ij}}+W_i\right)\right\}^{\gamma_{ij}} \exp\left\{-(t_{ij}-c)^a\exp\left(\beta^T\mathbf{x_{ij}}+W_i\right)\right\} \end{aligned}$$

Distribusi posterior marginal untuk masing-masing parameter a, c dan β_i serta λ dilakukan dengan cara mengintegralkan keluar parameter-parameter yang bersangkutan (a, c, β_i dan λ) dan dijelaskan sebagai berikut.

$$p(a|c,\lambda,\beta_i) \propto \int_c\int_\lambda\int_{\beta_1}\cdots\int_{\beta_p} l(t|c,\lambda,\beta_1,\cdots,\beta_p)\,p(c)\,p(\lambda)\,p(\beta_1)\cdots p(\beta_p)\,dc\,d\lambda\,d\beta_1\cdots d\beta_p$$

$$p(c|a,\lambda,\beta_i) \propto \int_a\int_\lambda\int_{\beta_1}\cdots\int_{\beta_p} l(t|a,\lambda,\beta_1,\cdots,\beta_p)\, p(a)\, p(\lambda)\, p(\beta_1)\cdots p(\beta_p)\, da\, d\lambda\, d\beta_1 \cdots d\beta_p$$

$$p(\lambda|a,c,\beta_i) \propto \int_a\int_c\int_{\beta_1}\cdots\int_{\beta_p} l(t|a,c,\beta_1,\cdots,\beta_p)\, p(a)\, p(c)\, p(\beta_1)\cdots p(\beta_p)\, da\, dc\, d\beta_1 \cdots d\beta_p$$

$$p(\beta_1|a,c,\lambda,\beta_{i\neq 1}) \propto \int_a\int_c\int_\lambda\int_{\beta_2}\cdots\int_{\beta_p} l(t|a,c,\lambda,\beta_2,\cdots,\beta_p)p(a)p(c)p(\lambda)p(\beta_1)\cdots\ p(\beta_p)$$
$$\times\, da\, dc\, d\lambda\, d\beta_2 \cdots\ d\beta_p$$

$$\vdots$$

$$p(\beta_p|a,c,\lambda,\beta_{i\neq p}) \propto \int_a\int_c\int_\lambda\int_{\beta_1}\cdots\int_{\beta_{p-1}} l(t|a,c,\lambda,\beta_1,\cdots,\beta_{p-1})p(a)p(c)p(\lambda)p(\beta_1)\cdots\ p(\beta_{p-1})$$
$$\times\, da\, dc\, d\lambda\, d\beta_1 \cdots\ d\beta_{p-1}$$

Update parameter di dalam model dilakukan melalui *Gibbs Sampling* berdasarkan data sampel dari bentuk distribusi bersyarat penuhnya (*full conditional distribution*) yang didapatkan berdasarkan persamaan (12).

Distribusi posterior tersebut cukup rumit sehingga estimasi terhadap parameter-parameternya dilakukan melalui *Gibbs Sampling* yang merupakan bentuk *iterative sampling* dari setiap distribusi kondisionalnya. Secara sederhana, estimasi parameter-parameter model melalui *Gibbs Sampling* dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Menentukan nilai awal (*initial value*) untuk masing-masing parameter.
   $\left(a^0, c^0, \lambda^0, \beta_1^0, \cdots, \beta_p^0\right)$
2. Selanjutnya didapatkan urutan acak
   a^1 dari $p\left(a|t, c^0, \lambda^0, \beta_1^0, \cdots, \beta_p^0\right)$
   c^1 dari $p\left(c|t, a^0, \lambda^0, \beta_1^0, \cdots, \beta_p^0\right)$
   λ^1 dari $p\left(\lambda|t, a^0, c^0, \beta_1^0, \cdots, \beta_p^0\right)$
   β_1^1 dari $p\left(\beta_1|t, a^0, c^0, \lambda^0, \beta_2^0, \cdots, \beta_p^0\right)$
   $\vdots$
   β_p^1 dari $p\left(\beta_p|t, a^0, c^0, \lambda^0, \beta_2^0, \cdots, \beta_{p-1}^0\right)$
3. Mengulangi langkah ke dua apabila dibutuhkan.

Bentuk *iterative sampling* dalam *Gibbs Sampling* tersebut kemudian diaplikasikan dalam program *opensource* WinBUGS untuk memudahkan estimasi parameter-parameter dalam model spasial survival dengan distribusi waktu survival weibull-3p. Berikut ini merupakan salah satu contoh aplikasi programnya.

```
model;
{
  for( i in 1 : N ) {
    obs.t[i] ~ dweib3(alpha[Kab[i]],beta[Kab[i]],gamma[Kab[i]])I(t.cen[Kab[i]],)
beta[i] <-
exp(b0[Kab[i]]+b1[Kab[i]]*X1[i]+b2[Kab[i]]*X2[i]+b3[Kab[i]]*X3[i]+b4_1[Kab[i]]*X4_1[i]+b4_2[Kab[i]]*X4_2[i]+b4
_3[Kab[i]]*X4_3[i]+b4_4[Kab[i]]*X4_4[i]+b4_5[Kab[i]]*X4_5[i]+b5_1[Kab[i]]*X5_1[i]+b5_2[Kab[i]]*X5_2[i]+b6[Kab
[i]]*X6[i]+b7[Kab[i]]*X7[i]+b8_1[Kab[i]]*X8_1[i]+b8_2[Kab[i]]*X8_2[i]+W[Kab[i]])
  }
        for (i in 1:nsum) {weights[i] <- 1}

        W[1:regions] ~ car.normal(adj[], weights[], num[], tau)
```

```
for( i in 1 : s )   {alpha[i] ~ dgamma(1,1)}
            gamma[1] ~ dunif(0,729)
            gamma[2] ~ dunif(0,244)
            gamma[3] ~ dunif(0,207)
            ……………………………..
            ……………………………..
            gamma[35] ~ dunif(0,242)
            gamma[36] ~ dunif(0,0)
            gamma[37] ~ dunif(0,0)
            gamma[38] ~ dunif(0,200)
            for( i in 1 : s ) {b0[i] ~ dnorm(5.0670,0.2784)}
            for( i in 1 : s ) {b1[i] ~ dnorm(-0.087,0.0239)}
            for( i in 1 : s ) {b2[i] ~ dnorm(-0.003,0.0006)}
            for( i in 1 : s ) {b3[i] ~ dnorm(-0.233,0.0502)}
            for( i in 1 : s ) {b4_1[i] ~ dnorm(0.626,0.2704)}
            for( i in 1 : s ) {b4_2[i] ~ dnorm(0.488,0.2693)}
            for( i in 1 : s ) {b4_3[i] ~ dnorm(0.606,0.2664)}
            for( i in 1 : s ) {b4_4[i] ~ dnorm(0.693,0.2669)}
            for( i in 1 : s ) {b4_5[i] ~ dnorm(-0.273,0.3349)}
            for( i in 1 : s ) {b5_1[i] ~ dnorm(0.138,0.0354)}
            for( i in 1 : s ) {b5_2[i] ~ dnorm(0.287,0.0231)}
            for( i in 1 : s ) {b6[i] ~ dnorm(0.009,0.0008)}
            for( i in 1 : s ) {b7[i] ~ dnorm(0.006,0.0015)}
            for( i in 1 : s ) {b8_1[i] ~ dnorm(-0.063,0.0371)}
            for( i in 1 : s ) {b8_2[i] ~ dnorm(-0.056,0.0383)}
            for( i in 1 : s ) {tau[i] ~ dgamma(1,1)}
            for( i in 1 : s ) {sigma[i] <- sqrt(1/tau[i])}
}

Initials
tau[] alpha[] b0[] b1[] b2[] b3[] b4_1[] b4_2[] b4_3[] b4_4[] b4_5[] b5_1[] b5_2[] b6[] b7[] b8_1[] b8_2[]
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
………………………………………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………………………………………..
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
1       1   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
END

list(Nsubj=507,regions=38, nsum=206, adj=c(3, 2,
28, 11, 10, 9, 4, 3, 1,
28, 10, 9, 4, 2, 1,
28, 27, 19, 18, 10, 9, 3, 2,
34, 33, 32, 21, 7,
37, 34, 32, 30,
36, 34, 33, 29, 26, 22, 21, 20, 5,
36, 33, 31, 29, 28, 26, 23, 15, 13, 9,
28, 18, 15, 13, 10, 8, 4, 3, 2,
28, 24, 13, 12, 11, 9, 4, 3, 2,
24, 12, 10, 2,
24, 13, 11, 10,
15, 14, 12, 10, 9, 8,
15, 13,
36, 31, 29, 25, 23, 14, 13, 9, 8,
35, 31, 25,
38, 35,
28, 27, 9, 4,
28, 27, 4,
33, 26, 7,
34, 7, 5,
36, 7,
36, 31, 29, 15, 8,
12, 11, 10,
36, 31, 16, 15,
33, 29, 28, 27, 20, 8, 7,
33, 28, 26, 19, 18, 4,
33, 29, 27, 26, 19, 18, 10, 9, 8, 4, 3, 2,
36, 33, 31, 28, 26, 23, 15, 8, 7,
37, 32, 6,
```

```
36, 29, 25, 23, 16, 15, 8,
37, 34, 30, 6, 5,
34, 29, 28, 27, 26, 20, 8, 7, 5,
37, 33, 32, 21, 7, 6, 5,
17, 16,
31, 29, 25, 23, 22, 15, 8, 7,
34, 32, 30, 6,
17),
num = c(2, 7, 6, 8, 5, 4, 9, 10, 9, 9,
4, 4, 6, 2, 9, 3, 2, 4, 3, 3,
3, 2, 5, 3, 4, 7, 6, 12, 9, 3,
7, 5, 9, 7, 2, 8, 4, 1), obs.t = c(730,245,313,208,589,NA, 518,NA, 374,347,199,214,396
,730,NA, 549,536,449,401,383,348,325,493,220,402,730
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
,374,NA, NA, 362,313,299,290,277,271,257,NA, 227,215
,215,212,198,191,199,730,NA, 730,730,229,208,201,214), X1 = c(0,1,1,1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0
,1,0,0,1,1,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,1,0,0,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0
,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0), X2 = c(28.00,28.00,32.00,25.00,35.00,42.00,33.00,39.00,27.00
,29.00,28.00,29.00,6.00, 30.00,28.00,38.00,27.00,37.00
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
,35.00,29.00,31.00,46.00,34.00,29.00,26.00,25.00,38.00
,22.00,44.00,34.00), X3 = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), X4_1 = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0), X4_2 = c(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0
,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0), X4_3 = c(0,0,1,1,1,0,1,1,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,1
,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1,1
………………………………………..
………………………………………..
,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1
,0,1,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1), X4_4 = c(1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,1,1,0
,1,0,0,1,0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0), X4_5 = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0), X5_1 = c(0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,1
,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1
,1,0,1,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1), X5_2 = c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,0
,1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,1,1,1,0,1,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,1,0,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0
,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0),  X6 = c(59,38,42,47,45,43, 7,55,50,40,52,41,11,68,50
,45,64,50,65,45,50,46,41,62,56,41,79,59,50,62
……………………………………………………..
……………………………………………………..
,49,65,35,10,45,46,64,30,59,79,53,41,38,56,57
,72,59,52,64,48,44,47,45,41,45,37,51), X7 = c(15.86,2.00, 3.87, 4.08, 49.60,3.60, 1.00, 3.00, 6.00
,2.00, 3.70, 17.00,25.00,3.60, 2.00, 13.00,3.00, 9.00
```

```
…………………………………………………………
…………………………………………………………
,7.00, 1.00, 13.00,2.00, 4.00, 2.00, 5.00, 3.00, 1.00
,0.00, 1.00, 1.00), X8_1 = c(0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
………………………………………..
………………………………………..
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0), X8_2 = c(1,1,1,0,1,1,0,1,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1
,1,1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1
………………………………………..
………………………………………..
,1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1
,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,1), Kab = c(1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7
, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9,10,11,11,12,13,13
,13,13,13,13,13,13,14,14,14,14,14,14,14,15,15
,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,15,16,16,16,16
,17,17,17,17,18,19,19,20,20,20,20,20,20,21,21
,21,21,21,21,21,21,21,21,22,22,22,22,22,22,23
,23,23,23,24,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25
,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,25,26
,26,26,26,26,26,27,27,28,29,29,29,29,30,30,31
,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31
,32,32,33,33,33,33,33,33,34,34,34,34,34,34,34
,34,34,34,35,35,35,35,36,36,36,36,36,36,36,36
,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36
,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36
,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36,36
,36,36,36,36,37,37,37,37,38,38,38,38), t.cen = c(0,  0,  0,  0,  0,106,  0, 40,  0,  0,  0,  0,  0
,  0, 34,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0
……………………………………………….
……………………………………………….
,  0, 57, 52,  0,  0,  0,  0,  0,  0,  0, 16,  0,  0
,  0,  0,  0,  0,  0,  0,189,  0,  0,  0,  0,  0,  0))
```

Code tersebut merupakan contoh aplikasi model spasial survival dengan dsitribusi waktu survivalnya adalah weibull-3p dalam program *opensource* WinBUGS dengan jumlah daerah sebanyak 38 (kabupaten, misalnya), total ketetanggaan sebanyak 206 *adjacent* serta terdapat 507 data.

8. Penutup

Berdasarkan hasil penurunan rumus terhadap model survival weibull-2p dengan menambahkan *spatial frailty*, maka dapat disimpulkan beberapa hal, antara lain:

1. Distribusi waktu survival weibull-3p dapat diaplikasikan pada model spasial survival dengan menambahkan *frailty* spasial.
2. Model spasial survival dengan distribusi waktu survivalnya weibull-3p lebih mudah dilakukan melalui pendekatan Bayesian menggunakan *gibbs sampling*.

3. Pendekatan Bayesian melalui *gibbs sampling* untuk melakukan estimasi parameter model spasial survival dengan waktu survival berdistribusi weibull-3p dilakukan melalui code program *opensource* WinBUGS.

Daftar Pustaka

Aksioma, D. F., dan Iriawan, N., (2010). Spatial Autocorrelation of The DHF Outbreaks in The City of Surabaya. *Proceedings of The Third International Conference on Mathematics and Natural Sciences (ICMNS) 2010*, Bandung: p. 48 – 56.

Banerjee, S., Wall, M. M., & Carlin, B. P., (2003). Frailty Modeling for Spatially Correlated survival data, with application to infant mortality ini Minnesota. *Biostatistics*, p. 123-142.

Carlin, B. P., & Louis, T. A., (2000). *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis* (2 ed.). Boca Raton: FL: Chapman and Hall/CRC Press.

Congdon, P., (2003). *Applied Bayesian Modelling*. London: John Wiley & Sons, Ltd.

Darmofal, D., (2008). *Bayesian Spatial Survival Models for Political Event Processes*. Department of Political Science, University of South Carolina. 350 Gambrell Hall. Columbia.

Dohoo, I. R., (2008). Quantitative epidemiology: Progress and Challenges. *Preventive Veterinary Medicine, 86*, p. 260-269.

Kleinbaum, D., (2005). *Survival Analysis, a Self-Learning Text.* USA: Springer Science+Bussiness Media, Inc.

Ntzoufras, I., (2009). *Bayesian modeling Using WinBUGS*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Wall, M. M., (2004). A Close Look at the Spatial Structure Implied by the CAR and SAR Models. *Journal of Statistical Planning and Inference, 121*, p. 311-324.