DIMENSI PARTISI GRAF THORN DARI GRAF KINCIR Wd_2^m UNTUK m=1,2,3

(*A NOTE ON THE PARTITION DIMENSION OF THORN OF WINDMILL GRAPH Wd_2^m FOR m=1,2,3*)

Siska Zayendra[1], Auli Mardhaningsih[2], Lyra Yulianti[3], Effendi[4]
[1]Universitas Andalas, szayendra@gmail.com
[2] Universitas Andalas, aulimardhaningsih@gmail.com
[3] Universitas Andalas, lyra@sci.unand.ac.id
[4] Universitas Andalas, effendi_sjarief@yahoo.com

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung. Himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, dan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi tersebut. Misalkan $v \in V(G)$, representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), .., d(v, S_k))$. Π disebut partisi pembeda jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π. Kardinalitas yang minimum dari partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$. Thorn dari graf G, dengan parameter $l_1, l_2, \ldots, l_n$ diperoleh dengan menambahkan daun sebanyak l_i ke titik v_i dari graf G, untuk $i \in \{1, \ldots, n\}$, dengan $l_i \geq 1$. Graf *thorn* dari graf G dinotasikan dengan $Th(G, l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Pada jurnal ini ditentukan dimensi partisi graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m untuk $m = 1, 2, 3$, dinotasikan dengan $pd(Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m}))$, untuk $i = 0, 1, 2, .., 2m$.

Kata kunci: Dimensi Partisi, graf *thorn*, graf kincir.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph. The set of vertices $V(G)$ is partitioned into several partitions, and $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ is k-partition of $V(G)$. Let $v \in V(G)$, the representation of v with respect to Π denoted by $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), .., d(v, S_k))$. Π is said to be resolving if for every vertices in G has a different representations respect to Π. The minimum cardinality of resolving is called the partition dimension of G, denoted by $pd(G)$. The thorn of G, with parameters $l_1, l_2, \ldots, l_n$ is obtained by attaching l_i to the vertex v_i of G, for $i \in \{1, \ldots, n\}$, with $l_i \geq 1$. Thorn graph of G denoted by $Th(G, l_1, l_2, \ldots, l_n)$. In this paper we determine the partition dimension of thorn of windmill graph Wd_2^m for $m = 1, 2, 3$, denoted by $pd(Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m}))$ for $i = 0, 1, 2, .., 2m$.

Keywords: *Partition dimension, thorn graph, windmill graph.*

PENDAHULUAN

Suatu graf G adalah pasangan himpunan terurut yang terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misal $V(G)$ dipartisi menjadi k buah himpunan

$S_1, S_2, \dots, S_k$ yang saling lepas. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi tersebut. Misal terdapat titik $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), \dots, d(v, S_k))$. Jika titik-titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π, maka Π disebut partisi pembeda (*resolving partition*) graf G. Kardinalitas yang minimum dari partisi penyelesaian disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$ (Chartrand, Zhang, & Salehi, 1998).

Sebelumnya sudah banyak hasil penelitian mengenai dimensi partisi dau suat graf, seperti penelitian Chartrand. dkk (Chartrand et al., 1998) membahas dimensi partisi dari beberapa graf terhubung. Tomescu, I. dkk (Tomescu, Javaid, & Slamin, 2007) membahas dimensi partisi dari graf roda. Darmaji (Darmaji, 2011) membahas dimensi partisi dari graf multipartite dan graf hasil korona dua buah graf terhubung, dan masih banyak penelitian lainnya.

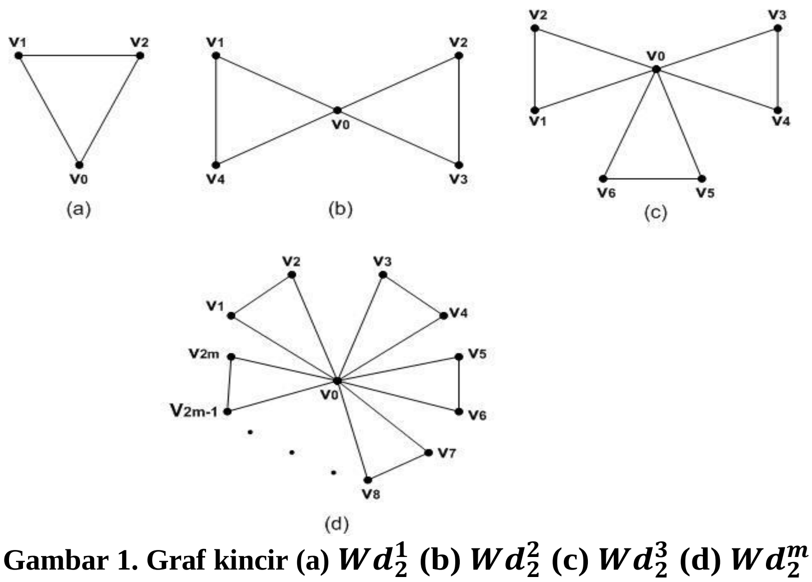
Berikut adalah Definisi, Teorema dan Lema pendukung untuk menyelesaikan masalah utama pada jurnal ini.

Definisi 1.1. (Gutman, 1998) *Misalkan* $l_1, l_2, \dots, l_n$ *adalah bilangan-bilangan bulat positif dan* G *adalah suatu graf dengan* $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. *Thorn dari graf* G, *dengan parameter* $l_1, l_2, \dots, l_n$ *diperoleh dengan menambahkan daun sebanyak* l_i *ke titik* v_i *dari graf* G, *untuk* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, *dengan* $l_i \geq 1$. *Graf thorn dari graf* G *dinotasikan dengan* $Th(G, l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Teorema 1.2. (Lloyd, Bondy, & Murty, 2007) *Misalkan* G *adalah suatu graf terhubung dengan* $n \geq 2$, *maka* $pd(G) = 2$ *jika dan hanya jika graf* $G = P_n$.

Lema 1.3. (Lloyd et al., 2007) *Misalkan* Π *adalah himpunan partisi penyelesaian dari* $V(G)$ *dan* $u, v \in V(G)$. *Jika* $d(u, w) = d(v, w)$ *untuk semua titik-titik* $w \in V(G) \backslash \{u, v\}$ *maka* u *dan* v *termasuk pada partisi berbeda dari* Π.

Misalkan terdapat m buah graf lengkap K_2. Graf kincir dikonstruksi dengan cara menghubungkan satu titik baru namakan v_0, ke semua titik yang ada di mK_2. Graf kincir dinotasikan dengan Wd_2^m, untuk $m \geq 1$.



Gambar 1. Graf kincir (a) Wd_2^1 (b) Wd_2^2 (c) Wd_2^3 (d) Wd_2^m

METODE

Metode Penelitian pada kajian ini adalah studi literatur dan mengumpulkan referensi yang relavan sebagi sumber utama. Memahami definisi terminologi dalam teori graf dan dimensi partisi dari graf. Menentukan dimensi partisi dari graf *thorn* graf kincir Wd_2^1, Wd_2^2 dan Wd_2^3. Menyimpulkan hasil yang diperoleh dari penentuan dimensi partisi dari graf *thorn* graf kincir Wd_2^1, Wd_2^2 dan Wd_2^3.

HASIL DAN PEMBAHASAN

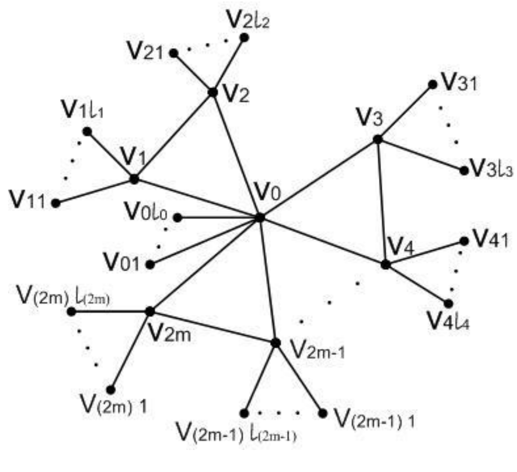
Graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m dinotasikan $Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m})$, diperoleh dengan cara menambahkan daun sebanyak l_i ke titik v_i dari graf Wd_2^m, untuk $i \in \{0,1,\ldots,2m\}$ dengan $l_0, l_1, \ldots, l_{2m}$ adalah bilangan bulat positif, $l_i \geq 1$.

Kardinalitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m})$ adalah

$$|V(Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m}))| = (2m+1) + \sum_{i=0}^{2m} l_i$$

$$|E(Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m}))| = (3m) + \sum_{i=0}^{2m} l_i$$

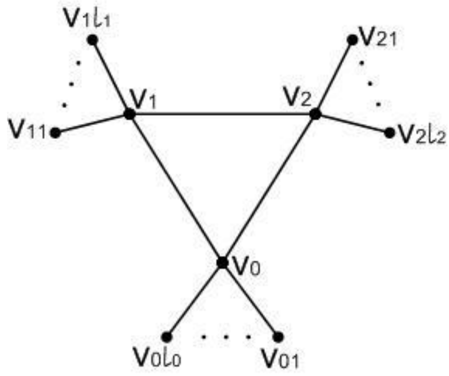
Secara umum graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m dapat dilihat pada Gambar 1 berikut :



Gambar 2. Graf $\boldsymbol{Th(Wd_2^m, l_0, l_1, \ldots, l_{2m})}$

Teorema 1.4.1. *Misalkan* $Th(Wd_2^1, l_0, l_1, l_2)$ *adalah graf thorn dari graf kincir* Wd_2^1, *dengan* l_0, l_1, l_2 *adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan* $l_i \geq 1$. *Notasikan* l_{max} *sebagai* $max\{l_i | 0 \leq i \leq 2\}$, $v_{l_{max}}$ *adalah titik yang bertetangga dengan* l_{max} *daun,* $|v_{l_{max}}|$ *adalah banyaknya himpunan titik yang bertetangga dengan* l_{max} *daun. Misalkan* $F = Th(Wd_2^1, l_0, l_1, l_2)$, *maka dimensi partisi F adalah sebagai berikut :*

$$pd(F) = \begin{cases} 3, \text{untuk } l_{max} = 1,2 \text{ atau } 3 \\ l_{max}, \text{untuk } l_{max} \geq 4. \end{cases}$$



Gambar 3. Graf $Th(Wd_2^1, l_0, l_1, l_2)$

Bukti. Akan dibuktikan dimensi partisi F, pembuktian ini terdiri dari dua kasus.
Kasus 1. Akan ditunjukkan bahwa $pd(F) = 3$ untuk $1 \leq l_{max} \leq 3$.
Karena $F \neq P_n$, maka $pd(F) \geq 3$. Selanjutnya ditunjukkan $pd(F) \leq 3$, yaitu dengan mengkonstruksi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana terdapat
$S_p = \{v_{p-1}, v_{kp} | 0 \leq k \leq 2, \text{jika } kp \text{ ada}\}$, untuk $p = 1,2,3$.
Karena $d(v_{p-1}, S_p) = 0$ dan $d(v_q, S_p) \neq 0$ untuk $(p-1) \neq q$, maka $r(v_{p-1}|\Pi) \neq r(v_q|\Pi)$. Misalkan $S_1 = \{v_0, v_{01}, \ldots, v_{k1}\}$, karena $d(v_{01}, S_1) = d(v_0, S_1) + 1$, maka $r(v_{01}|\Pi) \neq r(v_0|\Pi)$. Karena setiap daun di titik v_{p-1} harus berada di partisi yang berbeda, misalkan v_{11} dan v_{12} maka $d(v_{11}, S_p) \neq d(v_{12}, S_p)$ sehingga $r(v_{11}|\Pi) \neq r(v_{12}|\Pi)$. Dengan cara yang sama diperoleh bahwa titik v_{p-1} dan v_{kp} punya representasi yang berbeda.
Sehingga diperoleh $pd(F) \leq 3$. Karena $pd(F) \geq 3$ dan $pd(F) \leq 3$, dengan demikian $pd(F) = 3$.

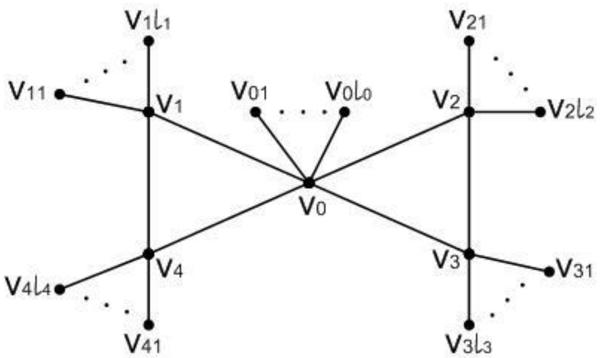
Kasus 2. Akan ditunjukkan bahwa $pd(F) = l_{max}$, untuk $l_{max} \geq 4$.
Misalkan $pd(F) = l_{max} - 1$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_{l_{max}-1}\}$, maka terdapat dua daun di titik v_i yang berada pada partisi yang sama, sehingga dua daun tersebut memiliki jarak yang sama terhadap semua titik lain. Jadi haruslah kedua titik tersebut berada di partisi yang berbeda. Oleh karena itu haruslah $pd(F) \geq l_{max}$. Hal ini kontradiksi dengan pemisalan bahwa $pd(F) = l_{max} - 1$.
Selanjutnya akan ditunjukkan $pd(F) \leq l_{max}$. Dikonstruksi sebanyak l_{max} partisi dari graf F yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_{l_{max}}\}$ dengan
$S_p = \{v_{p-1}, v_{kp} | 0 \leq k \leq 2, \text{jika } kp \text{ ada}\}$, untuk $p = 1,2,3$.

$$S_q = \{v_{kq} | 4 \leq q \leq l_{max}, 0 \leq k \leq 2, \text{jika } kq \text{ ada}\}$$

Karena setiap daun di titik v_{p-1} harus berada di partisi yang berbeda, misalkan $v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1l_{max}}$ maka $d(v_{11}, S_p) \neq d(v_{1l_{max}}, S_p)$ sehingga $r(v_{11}|\Pi) \neq r(v_{1l_{max}}|\Pi)$. Dengan cara yang sama diperoleh bahwa titik v_{p-1}, v_{kp} dan v_{kq} punya representasi yang berbeda. Sehingga diperoleh $pd(F) \leq l_{max}$.
Karena $pd(F) \geq l_{max}$ dan $pd(F) \leq l_{max}$, dengan demikian $pd(F) = l_{max}$.

Teorema 1.4.2. *Misalkan $Th(Wd_2^2, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$ adalah graf thorn dari graf kincir Wd_2^2, dengan $l_0, l_1, .., l_4$ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Misalkan $G = Th(Wd_2^1, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)$, maka dimensi partisi G adalah sebagai berikut :*

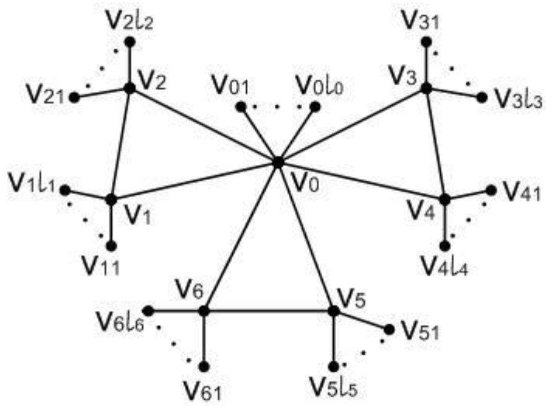
$$pd(G) = \begin{cases} 3, \text{untuk } l_{max} = 1 \text{ atau } 2 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 3, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 1 \text{ atau } 2 \\ 4, \text{untuk } \ l_{max} = 3, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 3{,}4 \text{ atau } 5 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 1{,}2 \text{ atau } 3 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 4, \qquad \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ 5, \text{untuk } \ l_{max} = 4, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 4, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \ \text{ dengan } |v_{l_{max}}| = 5 \\ l_{max}, \text{untuk } l_{max} \geq 5 \end{cases}$$



Gambar 4. Graf $\boldsymbol{Th(Wd_2^2, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4)}$

Bukti. Pembuktian pada teorema ini diperoleh dengan cara yang sama seperti Teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.3. *Misalkan $Th(Wd_2^3, l_0, l_1, .., l_6)$ adalah graf thorn dari graf kincir Wd_2^3, dengan $l_0, l_1, .., l_6$ adalah bilangan-bilangan bulat positif. Misalkan $H = Th(Wd_2^1, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$, maka dimensi partisi H adalah sebagai berikut :*



Gambar 5. Graf $\boldsymbol{Th(Wd_2^3, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)}$

$$pd(H) = \begin{cases} 3, \text{untuk } l_{max} = 1 \text{ atau } 2, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3,4,5 \text{ atau } 6 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 1, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 7 \\ 4, \text{untuk } l_{max} = 2, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 7 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 3, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3,4,5,6 \text{ atau } 7 \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2 \text{ atau } 3, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3 \text{ atau } 4, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ 5, \text{untuk } l_{max} = 4, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 4,5,6 \text{ atau } 7, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 4, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 5,6 \text{ atau } 7, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 5, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3 \text{ atau } 4, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 5, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3,4 \text{ atau } 5, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ 6, \text{untuk } l_{max} = 5, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 5,6 \text{ atau } 7, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 5, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 6 \text{ atau } 7, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 6, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3,4 \text{ atau } 5, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 6, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 1,2,3,4,5 \text{ atau } 6, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ 7, \text{untuk } l_{max} = 6, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 6 \text{ atau } 7, \text{jika } v_0 \text{ bukan } v_{l_{max}} \\ \quad \text{dan untuk } l_{max} = 6, \text{dengan } |v_{l_{max}}| = 7, \text{jika } v_0 \text{ adalah } v_{l_{max}} \\ l_{max}, \text{untuk } l_{max} \geq 7 \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian pada teorema ini diperoleh dengan cara yang sama seperti Teorema 1.4.1.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini yaitu diperoleh dimensi partisi graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m untuk $m = 1,2,3$, dinotasikan $F = Th(Wd_2^m, l_0, l_1, l_2)$. Pada jurnal ini ditentukan dimensi partisi graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m untuk $m = 1,2,3$. Sebagai saran untuk pengembangan lebih lanjut dapat dilakukan pengkajian tentang dimensi partisi graf *thorn* dari graf kincir Wd_2^m untuk $m \geq 4$.

DAFTAR RUJUKAN

Chartrand, G., Zhang, P., & Salehi, E. (1998). On the partition dimension of a graph. *Congr. Numerantium*, *130*, 157–168.

Darmaji. (2011). Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB, Tidak Ditrbitkan.*

Gutman, I. (1998). Distance of thorny graphs. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 63(77)*, 31–36.

Lloyd, E. K., Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2007). Graph Theory with Applications. *The Mathematical Gazette*, *62*(419), 63. https://doi.org/10.2307/3617646

Tomescu, I., Javaid, I., & Slamin. (2007). On the partition dimension and connected partition dimension of wheels. *Ars Combinatoria*, *84*, 311–317.