BILANGAN TERHUBUNG PELANGI GRAF BUNGA (W_m, K_n) DAN GRAF LEMON (Le_n)

(*THE RAINBOW CONNECTION NUMBER OF A FLOWER* (W_m, K_n) *GRAPH AND A LEMON GRAPH* (Le_n))

Irvania Sukma Kumala
Politeknik Kota Malang, irvania.s@gmail.com

Abstrak

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung tak trivial dan m adalah suatu bilangan bulat positif. Didefinisikan $c: E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,m\}$ sebagai suatu pewarnaan$-m$ sisi dari G. Lintasan P di G dikatakan *lintasan pelangi* jika tidak terdapat dua sisi di P yang mempunyai warna yang sama. Misalkan x dan y adalah titik di $V(G)$, suatu lintasan pelangi dikatakan *lintasan pelangi* $x - y$ jika lintasan tersebut mempunyai titik ujung x dan y. Bilangan terhubung pelangi dari G, dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil m sehingga G mempunyai pewarnaan-m sisi sedemikian sehingga setiap dua titik x dan y di $V(G)$ terdapat lintasan pelangi x – y. Pada penelitian ini didefinisikan dua kelas graf baru yaitu Graf Bunga (W_m, K_n) dan Graf Lemon (Le_n). Selanjutnya, ditentukan bilangan terhubung pelangi dari dua kelas graf baru tersebut.

Kata kunci: Bilangan Terhubung Pelangi, Graf, Pewarnaan Graf.

Abstract

All graphs considered in this paper are connected, finite, and simple. Let $G = (V(G), E(G))$ be a nontrivial connected graph and m be a positive integer. Let $c: E(G) \rightarrow \{1,2,\dots,m\}$ be an m-coloring of the edges of G. A path P in G is called a rainbow path, if no two edges of P are colored the same. Let x and y be vertices in $V(G)$, a rainbow path is called an $x - y$ rainbow path, if x and y be the end vertices. The rainbow connection number of G, denoted by $rc(G)$, is the minimum positive integer m so that every pair of vertices in $V(G)$ is connected by one path in which no two edges of it are colored the same. In other words, for every two vertices x and y in $V(G)$, there exists a rainbow $x - y$ path. In this paper we introduce new two graphs classes that are (W_m, K_n) flower graphs, and lemon (Le_n) graphs. Then, we determine the rainbow connection number of them.

Keywords: *Rainbow Connection Number, Graph, Graph Coloring.*

PENDAHULUAN

Keterhubungan merupakan salah satu subyek bahasan dalam graf teori yang cukup menarik, baik secara kombinatorik maupun secara algoritmik. Banyak hasil penelitian yang telah dilakukan tentang keterhubungan dalam teori graf, salah satunya adalah keterhubungan pelangi dari suatu graf.

Konsep dari keterhubungan pelangi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Johns, McKeon, dan Zhang pada tahun 2008. Bilangan terhubung pelangi dapat diaplikasikan dalam banyak hal. Salah satunya dapat digunakan

dalam optimasi pengamanan sistem pengiriman suatu informasi dari suatu pihak ke pihak lainnya. Selain itu, konsep tentang bilangan terhubung pelangi juga termotivasi dari interpretasinya yang menarik dalam suatu jaringan, salah satunya jaringan komunikasi. Jaringan komunikasi merupakan kumpulan terminal, tautan, dan titik penerima yang saling terhubung untuk memungkinkan telekomunikasi di antara pengguna. Tautan merupakan rute panggilan antara dua titik penerima (*acceptor*) dengan syarat bahwa rute antara kedua titik tersebut, diberikan suatu frekuensi yang berbeda agar tidak terjadinya interferensi atau gangguan dalam penyampaian komunikasi. Karena alasan agar lebih ekonomis ingin diminimalkan banyaknya spektrum frekuensi yang digunakan dalam jaringan. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan bilangan terhubung pelangi. Misalkan suatujaringan komunikasi direpresentasikan dengan menggunakan graf G, maka jumlah minimal spektrum frekuensi yang digunakan ini dapat dimisalkan sebagai bilangan terhubung pelangi dari graf G.

Dalam tulisannya yang pertama mengenai bilangan terhubung pelangi, (Chartrand et al., 2008) menunjukkan bilangan terhubung pelangi dari graf G adalah m jika dan hanya jika G adalah pohon berukuran m. Mereka juga menunjukkan bilangan pelangi dari graf cycle, roda, dan graf multipartit lengkap.

Jarak antara dua titik *x* dan *y* di $V\ (G)$, dinotasikan dengan $d(x,y)$, adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik *x* dan *y*. *Diameter* dari *G*, dinotasikan dengan $diam(G)$, didefinisikan sebagai $maks\{d(x,y)|x,y \in V(G)\}$ untuk setiap x dan y di $V(G)$. Misalkan ukuran dari G dinotasikan dengan k maka $diam(G) \leq rc(G) \leq k$. (Chartrand et al., 2008)

Beberapa peneliti yang lain telah berhasil menentukan bilangan keterhubungan pelangi dari kelas graf tertentu. Fitriani, (Fitriani & Salman, 2016) menunjukkan bilangan terhubung pelangi untuk graf hasil amalgamasi. Kumala (Kumala & Salman, 2015) menunjukkan bilangan terhubung pelangi untuk graf bunga C_mK_n dan C_3F_n.

(Dorbec, Schiermeyer, Sidorowicz, & Sopena, 2014) Menunjukkan bahwa untuk graph komplet yang berorientasi (*tournament*) dengan diameter d memiliki bilangan terhubung pelangi paling banyak *d+2*. Terdapat beberapa hasil tentang batas bilangan tehubung pelangi dari beberapa graf hasil dari graf operasi. Sebagai contoh: graf hasil Kartesius, graf hasil komposisi (hasil leksikografi), gabungan dari graf, dan graf *strong product*.. Sebuah overview tentang bilangan keterhubungan pelangi dapat ditemukan dalam buku yang dibuat oleh Li dan Sun (Li, Shi, & Sun, 2013).

METODE

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai salah satu pewarnaan graf yaitu pewarnaan pelangi pada graf terhubung beserta topik-topik yang berkaitan. Kajian secara komprehensif meliputi bidang tersebut adalah mengkaji jurnal penelitian terbaru mengenai graf terhubung pelangi yang sudah dilakukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bilangan Terhubung Pelangi untuk Graf Bunga (W_m, K_n)

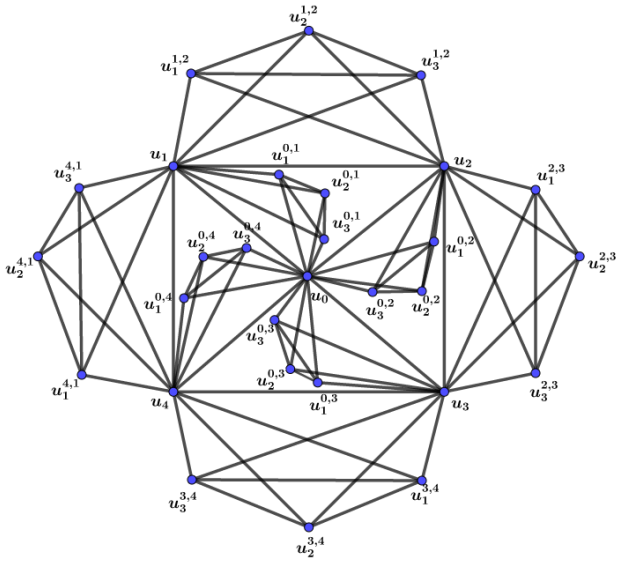
Misalkan m dan n adalah dua bilangan bulat dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. *Graf bunga* (W_m, K_n) adalah graf yang dibentuk dengan cara mengambil satu salinan graf roda W_m dan sebanyak $2m$ salinan graf lengkap K_n. Kemudian, untuk setiap $\in [1,2m]$ tempelkan sisi ke-i dari W_m ke suatu sisi dari salinan graf K_n ke$-i$. Graf bunga (W_m, K_n) dinotasikan dengan B_{W_m,K_n}.

Misalkan $i \in [1,m], j \in [1,n-2]$, dan $j \neq s$. Himpunan titik dan himpunan sisi dari B_{W_m,K_n} didefinisikan sebagai berikut.

$$V(B_{W_m,K_n}) = \{u_0\} \cup \{u_i\} \cup \{u_j^{0,i}\} \cup \{u_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\}.$$

$$E(B_{W_m,K_n}) = \{u_0u_i\} \cup \{u_0u_j^{0,i}\} \cup \{u_iu_j^{0,i}\} \cup \{u_iu_j^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\} \cup \{u_iu_{i+1} | u_{m+1} = u_1\}$$
$$\cup \{u_{i+1}u_j^{i,i+1} | u_{m+1} = u_1, u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}\} \cup \{u_j^{0,i}u_s^{0,i}\}$$
$$\cup \{u_j^{i,i+1}u_s^{i,i+1} | u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, u_s^{m,m+1} = u_s^{m,1}\}.$$

Sebagai ilustrasi, graf B_{W_4,K_5} ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf B_{W_4,K_5}

Teorema 1.1

Misalkan m dan n adalah dua bilangan bulat dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi untuk B_{W_m,K_n} adalah

$$rc(B_{W_m,K_n}) = \begin{cases} 3, & jika\ m = 3\ atau\ m = 4 \\ 4, & jika\ m \geq 5. \end{cases}$$

Bukti.

Pembuktian Teorema 1.1 dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1. Jika $m = 3$ atau $m = 4$ dan $n \geq 3$

i. Akan ditunjukkan $rc(B_{W_m,K_n}) \geq 3$.

   Dapat diperiksa bahwa $diam(B_{W_m,K_n}) = 3$. Karena itu, $rc(B_{W_m,K_n}) \geq 3$

ii. Akan ditunjukkan $rc(B_{W_m,K_n}) \leq 3$

Misalkan $i \in [1,m], k \in [1,m], u_{m+1} = u_1$ dan $j \in [1,n-2]$, $u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}$. Definisikan pewarnaan $c: E(B_{W_m,K_n}) \to [1,3]$ sebagai berikut.

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = u_i u_j^{i,i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil atau } e = u_{k+1}u_j^{k,k+1} \text{ dan } k \text{ genap} \\ & \text{atau } e = u_i^{0,i} \text{ dan } i \text{ ganjil atau } e = u_k u_0 \text{ dan } k \text{ genap;} \\ 2, & \text{jika } e = u_i u_j^{i,i+1} \text{ dan } i \text{ genap atau } e = u_{k+1}u_j^{k,k+1} \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ & \text{atau } e = u_i^{0,i} \text{ dan } i \text{ genap atau } e = u_k u_0 \text{ dan } k \text{ ganjil;} \\ 3, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya ditunjukkan dengan pewarnaan c terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap dua titik $x, y \in V(B_{W_m,K_n})$**.** Untuk x dan y yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi $x-y$.

Selanjutnya diperiksa untuk x dan y yang tidak saling bertetangga.

1) Untuk $m = 4$. Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_{i+2}$ dengan $i \in [1,2]$. Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_i, u_0, u_{i+1}, u_{i+2}$.
2) Untuk $m = 3$ atau $m = 4$. Misalkan $x = u_j^{i,i+1}$ dan $y = u_l^{0,k}$, dengan $i \in [1,m], k \in [1,m], j \in [1,n-2], u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, l \in [1,n-2]$, dan $u_l^{m,m+1} = u_l^{m,1}$. Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_j^{i,i+1}, u_i, u_0, u_l^{0,k}$.
3) Untuk $m = 3$ atau $m = 4$. Misalkan $x = u_j^{i,i+1}$ dan $y = u_l^{k,k+1}$ dengan $i \in [1,m], k \in [1,m], i \neq k, j \in [1,n-2], u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, l \in [1,n-2]$, dan $u_l^{m,m+1} = u_l^{m,1}$. Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_j^{i,i+1}, u_{i+1}, u_k, u_l^{k,k+1}$.
4) Untuk $m = 3$ atau $m = 4$. Misalkan $x = u_j^{0,i}$ dan $y = u_l^{0,k}$ dengan $i \in [1,m], k \in [1,m], i \neq k, j \in [1,n-2], l \in [1,n-2]$. Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_j^{0,i}, u_i, u_0, u_l^{0,k}$.

Jadi dengan pewarnaan c untuk $m = 3$ atau $m = 4$ terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap $x, y \in V(B_{W_m,K_n})$**.** Jadi untuk $m = 3$ atau $m = 4$, $rc(B_{W_m,K_n}) \leq 3$.

Kasus 2. Jika $m \geq 5$ dan $n \geq 3$

i. Akan ditunjukkan $rc(B_{W_m,K_n}) \geq 4$. Dapat diperiksa bahwa $diam(B_{W_m,K_n}) = 4$. Karena itu, $rc(B_{W_m,K_n}) \geq 4$.
ii. Akan ditunjukkan $rc(B_{W_m,K_n}) \leq 4$. Misalkan $i \in [1,m]. k \in [1,m], u_{m+1} = u_1, j \in [1,n-2], u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}$. Definisikan pewarnaan $c: E(B_{W_m,K_n}) \to [1,4]$ sebagai berikut.

$$(c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = u_i u_{i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil atau } e = u_i u_j^{i,i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ & \text{atau } e = u_{k+1}u_j^{k,k+1} \text{ dan } k \text{ genap atau } e = u_i u_j^{0,i}; \\ 2, & \text{jika } e = u_i u_j^{i,i+1} \text{ dan } i \text{ genap atau } u_0 u_j^{w,i} \text{ atau } e = u_{k+1}u_j^{k,k+1} \\ & e = u_{k+1}u_j^{k,k+1} \text{dan } k \text{ ganjil;} \\ 3, & \text{jika } e = u_i u_0 \text{ dan } i \text{ ganjil;} \\ 4, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan pewarnaan c terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap $x,y \in V(B_{W_m,K_n})$. Untuk x dan y yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi $x-y$. Misalkan $i \in [1,m], k \in [1,m], j \in [1,n-2], l \in [1,n-2], u_j^{m,m+1} = u_j^{m,1}, u_l^{m,m+1} = u_l^{m,1}$. Akan diperiksa untuk x dan y yang tidak saling bertetangga.

1) Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_k$, dengan $1 < k$.
   Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan u_i, u_0, u_{k-1}, u_k jika i dan k memiliki paritas yang sama, dan lintasan u_i, u_0, u_k jika i dan k memiliki paritas yang berbeda.
2) Misalkan $x = u_j^{i,i+1}$ dan $y = u_l^{0,k}$.
   Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_j^{i,i+1}, u_i, u_0, u_l^{0,k}$ jika i ganjil da lintasan $u_j^{i,i+1}, u_{i+1}, u_0, u_l^{0,k}$ jika i genap.
3) Misalkan $x = u_j^{i,i+1}$ dan $y = u_l^{k,k+1}$, dengan $i \neq k$.
   Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan $u_j^{i,i+1}, u_i, u_0, u_{k+1}, u_l^{k,k+1}$ jika i dan k memiliki paritas yang sama, dan lintasan $u_j^{i,i+1}, u_i, u_0, u_k, u_l^{k,k+1}$ jika i dan k memiliki paritas yang berbeda.
4) Misalkan $x = u_j^{0,i}$ dan $y = u_l^{0,k}$, dengan $i \neq k$.
   Terdapat lintasan pelangi $x-y$, yaitu lintasan$u_j^{0,i}, u_i, u_0, u_l^{0,k}$.

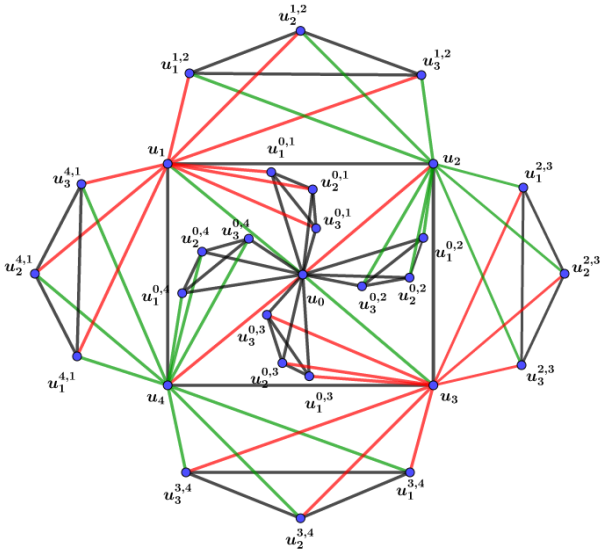
Maka terbukti dengan pewarnaan c diatas, untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 3$ terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap $x,y \in V(B_{W_m,K_n})$. Jadi untuk $m \geq 5$ dan $n \geq 3$, berlaku $rc(B_{W_m,K_n}) \leq 4$.

Dari pembuktian Kasus 1 dan Kasus 2 terbukti bahwa,

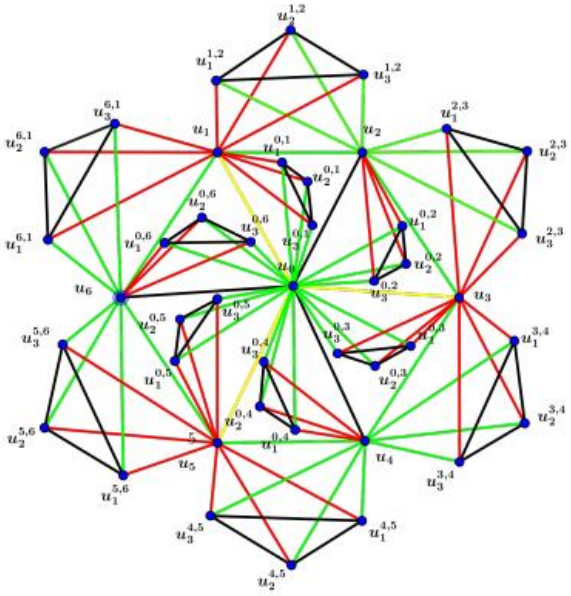
$$rc(B_{W_m,K_n}) = \begin{cases} 3, & jika\ m = 3\ atau\ m = 4 \\ 4, & jika\ m \geq 5. \end{cases}$$

■

Ilustrasi pewarnaan graf yang didefinisikan pada Teorema 1.1 Kasus 1 dan Kasus 2 ditunjukkan pada Gambar 2 dan pada Gambar 3 secara berurutan.



Gambar 2. Pewarnaan−3 Pelangi pada Graf B_{W_4,K_5}



Gambar 3. Pewarnaan−4 Pelangi pada Graf B_{W_6,K_5}

Bilangan Terhubung Pelangi untuk Graf Lemon (Le_n)

Misalkan n suatu bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Misalkan H_n adalah graf helm berorde $n+1$ dengan titik pusat u dan titik pendan v_i untuk setiap $i \in [1,n]$. *Graf lemon* berorde $2n+1$ adalah graf yang dikonstruksi dari graf helm H_n dengan menghubungkan u dan v_i, serta menghubungkan v_i dengan v_{i+1} dan v_{i-1} untuk setiap $i \in [1,n], v_{n+1} = v_1, v_0 = v_n$. Graf lemon berorde $2n+1$ dinotasikan dengan Le_n.

Himpunan titik dan himpunan sisi dari Le_n didefinisikan sebagai berikut.

$V(Le_n) = \{u\} \cup \{u_i | i \in [1,n]\} \cup \{v_i | i \in [1,n]\}$.

$E(Le_n) = \{u_i u_{i+1} | i \in [1,n], u_{n+1} = u_1\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1,n], v_{n+1} = v_1\}$
$\cup \{u_i v_i | i \in [1,n]\} \cup \{u_i u | i \in [1,n]\} \cup \{v_i u | i \in [1,n]\}$.

Teorema 1.2

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi untuk graf Le_n adalah

$$rc(Le_n) = \begin{cases} 2, & jika\ n = 3\ atau\ n = 4 \\ 3, & jika\ n \geq 5. \end{cases}$$

Bukti.

Pembuktian Teorema 1.2 dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1. Jika $n = 3$ atau $n = 4$

i. Akan ditunjukkan $rc(Le_n) \geq 2$.
   Diketahui $diam(Le_n) = 2$). Karena itu, $rc(Le_n) \geq 2$.

ii. Akan ditunjukkan $rc(Le_n) \leq 2$.
   Misalkan $i \in [1,n], u_{n+1} = u_1$, dan $v_{n+1} = v_1$. Definisikan suatu pewarnaan $c: E(Le_n) \to [1,2]$ sebagai berikut.

$$\big(c(e)\big) = \begin{cases} 1, & jika\ e = u_i u_{i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil atau } e = v_i v_{i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil} \\ & \text{atau } e = u_i \text{u dan } i \text{ ganjil atau } e = u_i v_i \text{ dan } i \text{ genap;} \\ 2, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya ditunjukkan dengan pewarnaan c terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap dua titik $x, y \in V(Le_n)$. Untuk $x$dan y yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi $x - y$. Selanjutnya diperiksa untuk $x, y \in V(Le_n)$ yang tidak saling bertetangga. Misalkan $i \in [1, n], u_{n+1} = u_1, v_{n+1} = v_1,$ dan $v_0 = v_n$.

1) Untuk $n = 3$ atau $n = 4$. Misalkan $x = u_i$ dan $y = v_{i+1}$, terdapat lintasan pelangi $x - y$ yaitu $u_{i,}u_{i+1}, v_{i+1}$.
2) Untuk $n = 3$ atau $n = 4$. Misalkan $x = u_i$ dan $y = v_{i-1}$, terdapat lintasan pelangi $x - y$ yaitu $u_{i,}u_i, v_{i-1}$.
3) Untuk $n = 4$. Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_j$ dengan $|i - j = 2|$, terdapat lintasan pelangi $x - y$ yaitu $u_{i,}u_{i+1}, u_j$.
4) Untuk $n = 4$. Misalkan $x = v_i$ dan $y = v_j$ dengan $|i - j = 2|$, terdapat lintasan pelangi $x - y$ yaitu $v_{i,}v_{i+1}, v_j$
5) Untuk $n = 4$. Misalkan $x = u_i$ dan $y = v_j$ dengan $|i - j = 2|$, terdapat lintasan pelangi $x - y$ yaitu $u_{i,}u, v_j$

Dengan pewarnaan diatas terbukti bahwa untuk $n = 3$ atau $n = 4$ terdapat lintasan pelangi $x - y$ untuk setiap $x, y \in V(Le_n)$. Karena itu, $rc(Le_n) \leq 2$.
Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa untuk $n = 3$ atau $n = 4$ $rc(Le_n) = 2$.

Kasus 2. Jika $n \geq 5$

i. Akan dibuktikan , $rc(Le_n) \geq 3$

Untuk $n = 5$. Andaikan $rc(Le_n) \leq 2$. Misalkan c' adalah pewarnaan-2 pelangi pada Le_n. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $c'(u_1u) = 1$. Karena lintasan $u_1 - v_3$ dan $u_1 - v_4$ masing-masing hanya memiliki satu lintasan dengan panjang dua, yaitu lintasan u_1, u, v_3 dan u_1, u, v_4 , haruslah $c'(v_3u) = c'(v_4u) = 2$.

Karena u_5, u, v_3 adalah satu-satunya lintasan $u_5 - v_3$ dengan panjang dua, haruslah $c'(u_5u) = 1$.

Selanjutnya perhatikan titik u_5 dan v_2. Karena satu-satunya lintasan $u_5 - v_2$ dengan panjang dua adalah u_5, u, v_2 , haruslah $c'(v_2u) = 2$.

Karena $c'(v_2u) = 2$, agar terdapat lintasan pelangi $u_4 - v_2$ dengan panjang dua, haruslah $c'(u_4u) = 1$.

Selanjutnya karena u_4, u, v_1 merupakan satu-satunya lintasan $u_4 - v_1$ dengan panjang dua, maka $c'(v_1u) = 2$.

Perhatikan titik u_3 dan v_1, agar terdapat lintasan pelangi $u_3 - v_1$ dengan panjang dua, maka $c'(u_3u) = 1$, hal ini memaksa$c'(u_5u) = 2$. Karena $c'(u_5u) = 2$, haruslah $c'(u_2u) = 1$.

Selanjutnya perhatikan bahwa untuk $|i - j| = 2$, terdapat dua lintasan $v_i - v_j$ dengan panjang dua yaitu v_i, v, v_j dan v_i, v_{i+1}, v_j, tetapi lintasan v_i, v, v_j bukanlah lintasan pelangi karena $c'(v_iv) = c'(v_jv)$. Sedangkan lintasan v_i, v_{i+1}, v_j merupakan lintasan yang membentuk graf lingkaran C_5 dimana diketahui $rc(C_5) = 3$. Kontradiksi dengan $rc(Le_n) = 2$. Karena itu, diperoleh $rc(Le_n) \geq 3$, untuk $n = 5$.

ii. Akan dibuktikan, $rc(Le_n) \leq 3$
Definisikan suatu pewarnaa-3 sisi $c: \rightarrow [1,3]$ sebagai berikut.

$$\big(c(e)\big) = \begin{cases} 1, \text{jika } e = u_i u \text{ atau } e = v_i u, \text{untuk } i \in [1,n] \text{ dan } i \text{ ganjil;} \\ 2, \quad \text{jika } e = u_i u \text{ atau } e = v_i u, \text{untuk } i \in [1,n] \text{ dan } i \text{ genap;} \\ 3, \quad \text{lainnya.} \end{cases}$$

Selanjutnya ditunjukkan dengan pewarnaan c terdapat lintasan pelangi $x-y$ untuk setiap dua titik $x, y \in V(Le_n)$. Untuk $x$dan y yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi $x - y$. Selanjutnya diperiksa untuk $x, y \in V(Le_n)$ yang tidak saling bertetangga. Misalkan $i \in [1,n], j \in [1,n], i \neq j$, dan $u_{n+1} = u_1$.

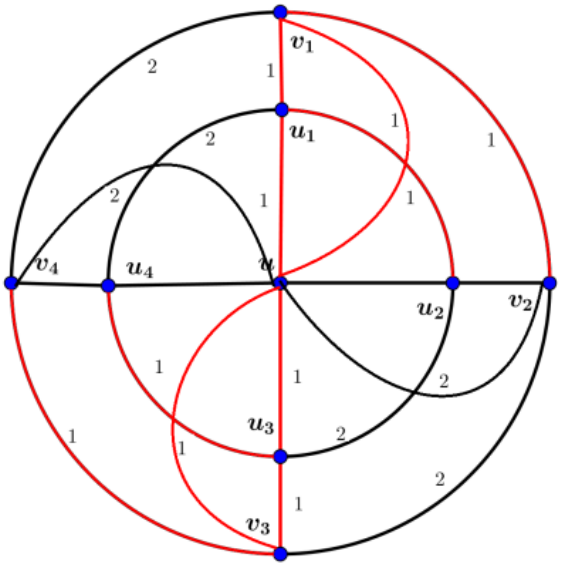
1) Misalkan $x = u_i$ dan $y = u_j$
   Terdapat lintasan pelangi $x - y$, yaitu u_i, u, u_j jika i dan j memiliki paritas yang berbeda, dan lintasan u_i, u, u_{j+1}, u_j jika i dan j memiliki paritas yang sama.
2) Misalkan $x = v_i$ dan $y = v_j$
   Terdapat lintasan pelangi $x - y$, yaitu v_i, u, v_j jika i dan j memiliki paritas yang berbeda, dan lintasan v_i, u, v_{j+1}, v_j jika i dan j memiliki paritas yang sama.
3) Misalkan $x = u_i$ dan $y = v$
   Terdapat lintasan pelangi $x - y$, yaitu u_i, u, v_j jika i dan j memiliki paritas yang berbeda, dan lintasan u_i, u, v_{j+1}, v_j jika i dan j memiliki paritas yang sama.

Dengan pewarnaan c diatas terbukti bahwa untuk $n \geq 5$ terdapat lintasan pelangi $x - y$ untuk setiap $x, y \in V(Le_n)$. Karena itu, $, rc(Le_n) \leq 3$. Dari i dan ii, dapat disimpulkan bahwa $rc(Le_n) = 3$, untuk $n \geq 5$. Jadi,

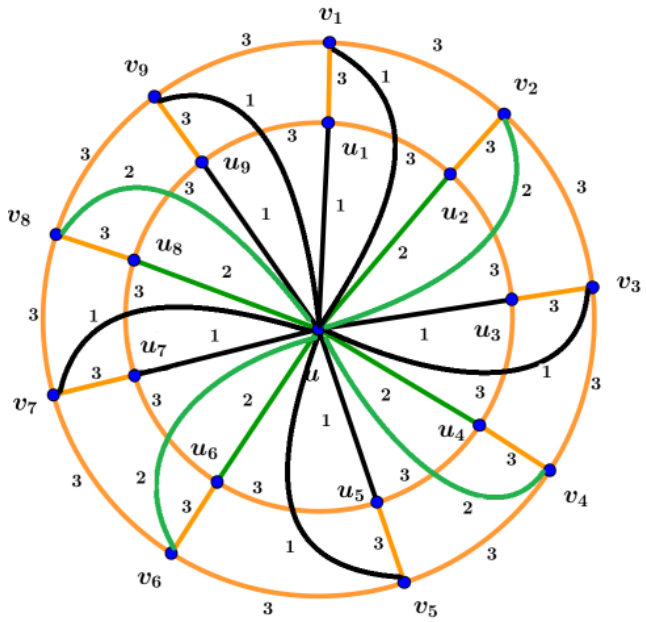
$$rc(Le_n) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n = 3 \text{ atau } n = 4; \\ 3, & \text{jika } n \geq 5. \end{cases}$$

■

Sebagai ilustrasi, pewarnaan-2 pelangi pada Le_4 dan pewarnaan-3 pelangi pada Le_9 diberikan pada Gambar 4 dan Gambar 5 secara berurutan.



Gambar 4. Pewarnaan-2 Pelangi pada Graf Le_4



Gambar 5. Pewarnaan−3 Pelangi pada Graf Le_9

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian ini diperoleh hasil bilangan terhubung pelangi untuk B_{W_m,K_n} adalah 3 jika $m = 3$ atau $m = 4$ dan 4 jika m paling tidak 5. Selain itu diperoleh hasil bilangan terhubung pelangi untuk graf Le_n adalah 2 jika $n = 3$ atau $n = 4$ dan 3 jika n paling tidak 5. Berlaku untuk m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$.

Sebagai saran untuk pengembangan lebih lanjut dapat dilakukan pengkajian tentang graf bunga yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Chartrand, G., Kalamazoo, Johns, G. L., Valley, S., Kathleen, A. M., London, N., … Kalamazoo. (2008). Rainbow Connection in Graphs. *Mathematica Bohemica*.

Dorbec, P., Schiermeyer, I., Sidorowicz, E., & Sopena, É. (2014). Rainbow connection in oriented graphs. *Discrete Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.07.018

Fitriani, D., & Salman, A. N. M. (2016). Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. https://doi.org/10.1016/j.akcej.2016.03.004

Kumala, I. S., & Salman, A. N. M. (2015). The Rainbow Connection Number of a Flower (Cm, Kn) Graph and a Flower (C3, Fn) Graph. *Procedia Computer Science*. https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.094

Li, X., Shi, Y., & Sun, Y. (2013). Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics*. https://doi.org/10.1007/s00373-012-1243-2