

SOLUSI NUMERIK MODEL EPIDEMI SEIR PADA PENYEBARAN TUBERKULOSIS DENGAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

(A NUMERICAL SOLUTION OF SEIR EPIDEMIC MODEL USING
ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD)

Ratna Dwi Christyanti¹, St. Syahdan²

¹Universitas Kaltara, ratnadwichristyantii@gmail.com

²Universitas Kaltara, stsyahdan89@gmail.com

Abstrak

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit menular yang menyerang paru-paru. Dalam program penanggulangan TB, sangat perlu diperhatikan jumlah pasien dengan hasil pengobatan lengkap, meninggal, gagal, default dan pindah. Pada artikel ini, dibangun sebuah model matematika yang menggambarkan tingkat penyebaran infeksi penyakit TB dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian. Kemudian melakukan simulasi terhadap model penyebaran penyakit tersebut. Tahapan metode penelitian meliputi membangun model epidemi SEIR untuk penyebaran penyakit TB; mencari solusi untuk penyebaran penyakit TB dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian; melakukan simulasi berbantuan perangkat lunak; menganalisis hasil simulasi; serta menyimpulkan perilaku model yang dianalisis tersebut. Dari hasil simulasi, ditemukan bahwa model ini cukup baik untuk menggambarkan penyebaran penyakit TB dengan menggunakan parameter yang bersesuaian.

Kata kunci: Model, SEIR, tuberkulosis, Adomian, simulasi.

Abstract

Tuberculosis (TB) is an infectious disease which affects the lungs. In the TB controlling program, it is very important to consider the number of patients with completed medication result, dead, default, and moved. In this article, we developed a mathematical model picturing the rate of TB infection spread, using Adomian Decomposition method, and then conducted a numeric simulation on the disease spread model. The steps of the research method that we performed were: developing SEIR epidemic model for TB disease spread; finding numeric solution for TB disease spread using Adomian Decomposition method; conducting a numeric simulation with the help of software; analyzing the simulation result; and concluding the behavior of the analyzed model. From the result of the simulation, we found that this model was quite good to picture the TB disease spread with the suitable parameter.

Keywords: Model, SEIR, tuberculosis, Adomian, simulation.

PENDAHULUAN

Tuberkulosis paru (TB) adalah penyakit infeksi yang umumnya menimbulkan tanda-tanda dan gejala yang sangat bervariasi pada masing-masing penderita mulai dari tanpa gejala hingga gejala yang sangat akut dan hanya beberapa bulan setelah

diketahui sehat bahkan setelah beberapa tahun (Babolian & Javadi, 2003). Hingga saat ini, penyakit TB masih menjadi masalah kesehatan dunia, termasuk di Indonesia. Penyakit TB di Indonesia menempati peringkat ketiga sebagai penyakit umum penyebab kematian setelah penyakit jantung dan penyakit pernapasan akut. Akan tetapi, TB menempati posisi pertama sebagai penyakit infeksi penyebab kematian.

Seiring dengan berkembangnya zaman, ditemukan bahwa analisis terhadap suatu peristiwa yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari dapat diinterpretasikan dalam bentuk model matematika, termasuk pula pada penyebaran epidemi penyakit (Athithan & Ghosh, 2013). Dengan menggunakan berbagai asumsi, penyebaran epidemi TB dapat dimodelkan secara matematis dalam berbagai bentuk. Secara umum, pemodelan epidemi penyakit dapat dituliskan sebagai suatu sistem persamaan diferensial.

Metode Dekomposisi Adomian merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dari suatu pemodelan epidemi penyakit. Metode Dekomposisi Adomian (MDA) menganggap bahwa solusi dari suatu sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk deret (Jafari & Daftardar-Gejji, 2006). Pada penelitian yang dilakukan oleh Nhawu (Nhawu, Mafuta, & Mushanyu, 2016), ditemukan bahwa metode ini cocok untuk digunakan untuk menentukan solusi permasalahan nilai awal dengan dengan osilasi dan eksponensial. Biazar (Biazar & Hosseini, 2016) memodifikasi metode ini untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal dengan dengan jenis Emden-Fowler. Adapun Mungkasi (Mungkasi & Ekaputra, 2018) menggunakan metode ini untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal model vibrasi. Pada paper ini, Metode Dekomposisi Adomian akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan pemodelan penyakit SEIR. Setelah itu akan diamati perilakunya melalui simulasi numerik berdasarkan parameter-parameter tertentu yang diberikan.

METODE

Suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau beberapa variabel tak bebas terhadap satu atau beberapa variabel bebas dinamakan persamaan diferensial (Evans & Raslan, 2005). Suatu persamaan diferensial yang hanya melibatkan satu atau beberapa turunan dari satu fungsi tak tentu y terhadap x dan mungkin fungsi y sendiri, fungsi tertentu dari x , dan konstan-konstan disebut Persamaan Diferensial Biasa (Hosseini & Nasabzadeh, 2007). Persamaan diferensial biasa yang paling

seederhana memiliki bentuk $G(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$. Persamaan diferensial ini dapat dicari

solusinya dengan cara menemukan antiturunannya. Persamaan diferensial memiliki orde dan derajat tertentu. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan. Adapun derajat (pangkat) persamaan diferensial yang dapat ditulis sebagai polinomial dalam turunan adalah derajat turunan tingkat tertinggi yang terjadi. Persamaan diferensial biasa linier orde n dengan y variabel tak bebas dan x variabel bebas adalah persamaan yang berbentuk

$$G(x) = a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0, \text{ dengan } a_n \neq 0.$$

Persamaan diferensial yang diselesaikan menggunakan metode Dekomposisi

Adomian dapat ditulis dalam bentuk $Fu = G(t)$, dengan F adalah operator diferensial non linier yang memuat suku linier dan non linier. Persamaan $Fu = G(t)$ dapat ditulis dalam bentuk $(L + R + N)u = G$. Dengan mudah dapat diperoleh bahwa

$$Lu = G - Ru - Nu \quad (1)$$

dengan $L = \frac{d}{dt}$ merupakan operator linier yang akan ditentukan inversnya, R adalah sisa operator linier, N bentuk non linier, dan G suku non homogen. Selanjutnya, kedua ruas persamaan (1) dikalikan dengan invers operator L , yaitu L^{-1} sehingga diperoleh

$$L^{-1}Lu = L^{-1}(G - Ru - Nu) \quad (2)$$

Pada persamaan (2), diperoleh $L^{-1}Lu = u - h$, dengan h adalah suku yang diperoleh setelah diintegrasikan, sehingga persamaan (2) menjadi

$$u = h + L^{-1}G - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3)$$

Pada metode Dekomposisi Adomian, solusi dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Selanjutnya diasumsikan Nu adalah fungsi analitik sebagai berikut.

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (4)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian khusus yang dibentuk untuk suku non linier. Polinomial Adomian dibentuk menggunakan ekspresi deret Taylor pada fungsi u_0 dan ditulis dalam bentuk berikut.

$$F(u) = F(u_0) + F'(u_0)(u - u_0) + F''(u_0) \frac{(u - u_0)^2}{2!} + \dots \quad (5)$$

Perhatikan bahwa $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dapat ditulis dalam bentuk

$$u - u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (6)$$

Akibatnya,

$$F(u) = F(u_0) + u_1 F'(u_0) + u_2 F''(u_0) + \dots \quad (7)$$

Perhatikan bahwa bentuk $Nu = F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$. Dengan demikian maka dengan

mudah diperoleh $F(u) = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots$ dengan $A_n = \sum_{v=1}^n c(v, n) F^{(v)}(u_0)$.

Dengan demikian, diperoleh polinomial Adomian A_n , sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A_0 &= F(u_0) \\ A_1 &= u_1 F'(u_0) \\ A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{u_1^2}{2} F''(u_0) \\ A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} F'''(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8)$$

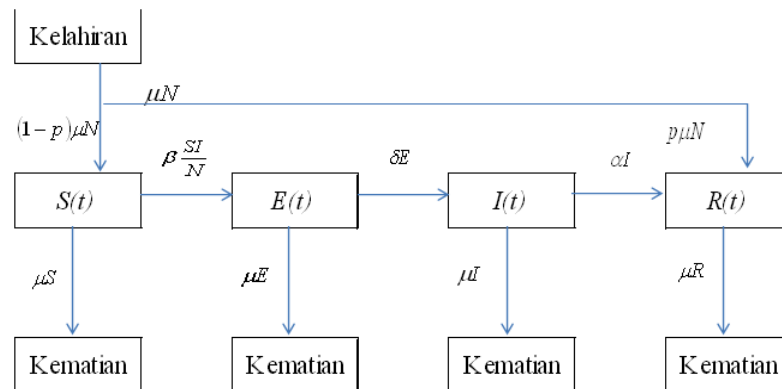
Persamaan diferensial dapat digunakan untuk memodelkan tingkat penyebaran

dan infeksi suatu penyakit. Terdapat beberapa model penyebaran penyakit epidemi, salah satunya adalah model epidemi SEIR (Khanh, 2016).

Model epidemi SEIR yang digunakan pada artikel ini adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{S}}{dt} &= (1-p)\mu - \beta SI - \mu S, \\ \frac{d\dot{E}}{dt} &= \beta SI - (\delta + \mu)E, \\ \frac{d\dot{I}}{dt} &= \delta E - (\alpha + \mu)I, \\ \frac{d\dot{R}}{dt} &= \mu p + \alpha I - \mu R. \end{aligned} \tag{9}$$

Secara skematis penyebaran penyakit yang dipengaruhi oleh vaksinasi dapat digambarkan dalam diagram transfer pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram transfer model epidemi SEIR

dengan,

- (t) adalah jumlah individu rentan pada saat t ,
- $E(t)$ adalah jumlah individu dikelas laten pada saat t ,
- $I(t)$ adalah jumlah individu terinfeksi pada saat t ,
- $R(t)$ adalah jumlah individu sembuh pada saat t .

Parameter-parameter yang digunakan sebagai berikut

1. μ adalah laju kelahiran dan laju kematian tiap individu pada populasi,
2. β adalah tingkat penyebaran atau peluang individu rentan menjadi individu laten setelah berinteraksi dengan individu terinfeksi,
3. δ adalah laju transfer dari kelas laten menjadi terinfeksi,
4. α adalah laju kesembuhan tiap individu,
5. p adalah proporsi vaksinasi.

Dengan $\mu, \beta, \delta, \alpha > 0$ dan p bernilai $0 \leq p \leq 1$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan, $\dot{S}(0) = k_1, \dot{E}(0) = k_2, \dot{I}(0) = k_3, \dot{R}(0) = k_4$. Dengan operator invers pada kedua ruas sistem persamaan (9), diperoleh sistem persamaan baru sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= k_1 + (1-p)\mu t - \beta \int_0^t \dot{S} \dot{I} dt - \mu \int_0^t \dot{S} dt, \\
 \dot{E}(t) &= k_2 + \beta \int_0^t \dot{S} \dot{I} dt - (\delta + \mu) \int_0^t \dot{E} dt, \\
 \dot{I}(t) &= k_3 + \delta \int_0^t \dot{E} dt - (\alpha + \mu) \int_0^t \dot{I} dt, \\
 \dot{R}(t) &= k_4 + \mu p t + \alpha \int_0^t \dot{I} dt - \mu \int_0^t \dot{R} dt.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Solusi dari Metode Dekomposisi Adomian adalah sebuah deret berikut.

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{S}_i, \quad \dot{E}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{E}_i, \quad \dot{I}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{I}_i, \quad \dot{R}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{R}_i.$$

Diperoleh

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{S}_i = k_1 + (1-p)\mu t - \beta \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} A_i(f_0, f_1, f_2, \dots, f_i) dt - \mu \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{S}_i dt,
 \tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{E}_i = k_2 + \beta \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} A_i(f_0, f_1, f_2, \dots, f_i) dt - (\delta + \mu) \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{E}_i dt,
 \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{I}_i = k_3 + \delta \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{E}_i dt - (\alpha + \mu) \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{I}_i dt,
 \tag{13}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{R}_i = k_4 + \mu p t + \alpha \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{I}_i dt - \mu \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} \dot{R}_i dt.
 \tag{14}$$

Dimana $\dot{S} \dot{I} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(f_0, f_1, f_2, \dots, f_i)$, sedangkan $A_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{d\lambda^i} \left(\sum_{n=0}^i f_n \lambda^n \right) \right]_{\lambda=0}$

Diperoleh polinomial adomian sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \dot{S}_0 \dot{I}_0 \\
 A_1 &= \dot{S}_0 \dot{I}_1 + \dot{S}_1 \dot{I}_0 \\
 A_2 &= \dot{S}_0 \dot{I}_2 + \dot{S}_1 \dot{I}_1 + \dot{S}_2 \dot{I}_0 \\
 A_3 &= \dot{S}_0 \dot{I}_3 + \dot{S}_1 \dot{I}_2 + \dot{S}_2 \dot{I}_1 + \dot{S}_3 \dot{I}_0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Dari polinomial adomian tersebut secara umum solusi persamaan (10) dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(t) &= k_1 + (1-p)\mu t - \beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - \mu \int_0^t \dot{S}_n dt, \\
 \dot{E}(t) &= k_2 + \beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - (\delta + \mu) \int_0^t \dot{E}_n dt, \\
 \dot{I}(t) &= k_3 + \delta \int_0^t \dot{E}_n dt - (\alpha + \mu) \int_0^t \dot{I}_n dt, \\
 \dot{R}(t) &= k_4 + \mu p t + \alpha \int_0^t \dot{I}_n dt - \mu \int_0^t \dot{R}_n dt.
 \end{aligned} \tag{15}$$

dengan $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ tiap sukunya dapat diperoleh secara rekursif sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_0 &= k_1 + (1-p)\mu t, \\
 \dot{E}_0 &= k_2, \\
 \dot{I}_0 &= k_3, \\
 \dot{R}_0 &= k_4 + \mu p t.
 \end{aligned}$$

Untuk $n = 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= -\beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - \mu \int_0^t \dot{S}_n dt = k_1 t + \frac{1}{2}(1-p)\mu t^2. \\
 \dot{E}_1 &= \beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - (\delta + \mu) \int_0^t \dot{E}_n dt = \left[\beta k_3 \left(k_1 + \frac{1}{2}(1-p)\mu t \right) - (\delta + \mu) k_2 \right] t. \\
 \dot{I}_1 &= \delta \int_0^t \dot{E}_n dt - (\alpha + \mu) \int_0^t \dot{I}_n dt = \left[\delta k_2 - (\alpha + \mu) k_3 \right] t. \\
 \dot{R}_1 &= \alpha \int_0^t \dot{I}_n dt - \mu \int_0^t \dot{R}_n dt = \left[\alpha k_3 - \mu \left(k_4 + \frac{1}{2} \mu p t \right) \right] t.
 \end{aligned}$$

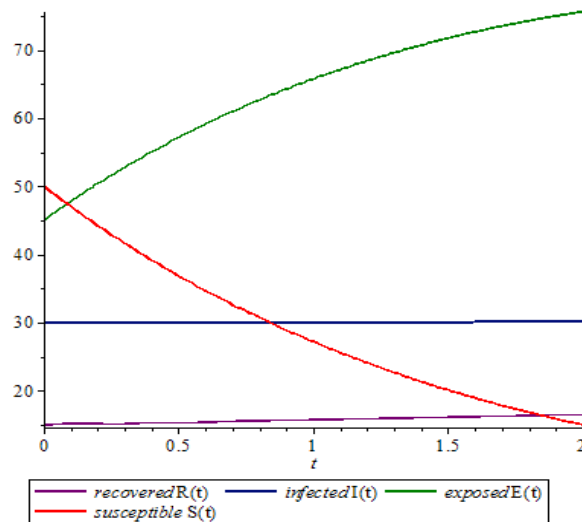
Untuk $n = 1$

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_2 &= -\beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - \mu \int_0^t \dot{S}_n dt = k_1 + (1-p)\mu t. \\
 \dot{E}_2 &= \beta \int_0^t \sum_{i=0}^n \dot{S}_i \dot{I}_{n-i} dt - (\delta + \mu) \int_0^t \dot{E}_n dt = \left[\begin{aligned} &\beta \left(k_1 + \frac{1}{2}(1-p)\mu t + k_3 \left(k_1 + \frac{1}{4}(1-p)\mu t \right) \right) \\ &- (\delta + \mu) \left(\beta k_3 \left(k_1 + \frac{1}{3}(1-p)\mu t \right) - (\delta + \mu) k_2 \right) \frac{1}{2} t \end{aligned} \right] t.
 \end{aligned}$$

$$\dot{I}_2 = \delta \int_0^t \dot{E}_n dt - (\alpha + \mu) \int_0^t \dot{I}_n dt = \left[\begin{array}{l} \delta \left(\beta k_3 \left(k_1 + \frac{1}{3}(1-p)\mu t \right) - (\delta + \mu)k_2 \right) \\ -(\alpha + \mu)(\delta k_2 - (\alpha + \mu)k_3) \end{array} \right] \frac{1}{2} t^2.$$

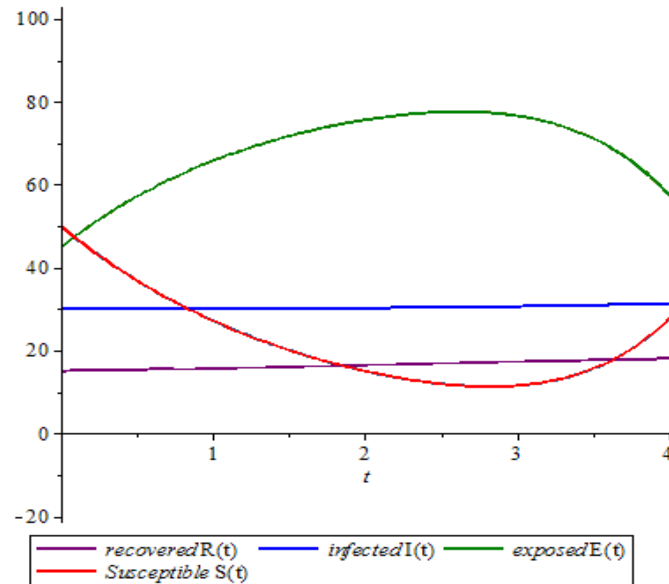
$$\dot{R}_2 = \alpha \int_0^t \dot{I}_n dt - \mu \int_0^t \dot{R}_n dt = \left(\alpha \delta k_2 - (\alpha^2 - 2\alpha\mu)k_3 + \mu^2 k_4 + \frac{1}{3} \mu^3 p t \right) \frac{1}{2} t^2.$$

Berikut disajikan simulasi hasil perhitungan hasil model epidemi SEIR menggunakan metode ADM dengan parameter $k_1 = 50$; $k_2 = 45$; $k_3 = 30$; $k_4 = 15$; $\mu = 0,01$; $\beta = 0,02$; $\delta = 0.02$; $\alpha = 0,03$; dan $p = 0,9$.



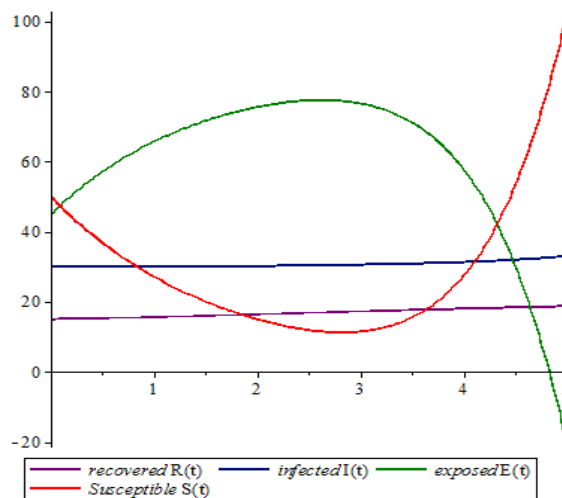
Gambar 1. Plot aproksimasi solusi model dengan $0 \leq t \leq 2$

Pada Gambar 1 tersebut, terlihat bahwa ketika populasi susceptible $S(t)$ semakin berkurang maka populasi exposed $E(t)$ semakin bertambah begitu juga berlaku pada populasi infected $I(t)$ dan recovered $R(t)$. Hal ini menunjukkan bahwa pada penurunan jumlah populasi rentan akan berdampak pada peningkatan jumlah populasi terinfeksi. Akan tetapi, populasi yang terinfeksi tersebut kemudian akan sembuh.



Gambar 2. Plot aproksimasi solusi untuk $0 \leq t \leq 4$

Pada Gambar 2, ditunjukkan bahwa pada saat populasi susceptible $S(t)$ semakin berkurang maka populasi exposed $E(t)$ akan semakin meningkat dan juga sebaliknya jika populasi susceptible $S(t)$ semakin meningkat maka populasi exposed $E(t)$ akan semakin menurun. Akan tetapi untuk populasi infected $I(t)$ dan recovered $R(t)$ terlihat terus mengalami kenaikan. Pada kasus ini, meningkatnya populasi rentan akan berdampak pada penurunan populasi terekspos. Populasi yang terinfeksi pun akan mengalami peningkatan. Namun, populasi terinfeksi tersebut akan sembuh.



Gambar 3. Plot aproksimasi solusi untuk $0 \leq t \leq 5$

Pada Gambar 3, ditunjukkan bahwa pada saat populasi susceptible $S(t)$ semakin berkurang maka populasi exposed $E(t)$ akan semakin meningkat dan juga sebaliknya jika populasi susceptible $S(t)$ semakin meningkat maka populasi exposed $E(t)$ akan semakin menurun. Akan tetapi untuk populasi infected $I(t)$ dan

recovered $R(t)$ terlihat terus mengalami kenaikan. Hal ini bermakna bahwa peningkatan populasi rentan akan berakibat pada meningkatnya populasi terinfeksi. Namun, kendatipun begitu populasi yang sembuh juga mengalami kenaikan.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa salah satu metode untuk menemukan solusi dari sistem persamaan differensial biasa dengan nilai awal tertentu adalah dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan agar melakukan kajian solusi analitik model epidemi SEIR untuk dibandingkan dengan solusi numeriknya.

DAFTAR RUJUKAN

- Athithan, S., & Ghosh, M. (2013). Mathematical modelling of TB with the effects of case detection and treatment. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(3), 223–230. <https://doi.org/10.1007/s40435-013-0020-2>
- Babolian, E., & Javadi, S. (2003). Restarted Adomian method for algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 146(2–3), 533–541. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00603-3](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00603-3)
- Biazar, J., & Hosseini, K. (2016). A modified Adomian decomposition method for singular initial value Emden-Fowler type equations. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 5, 69–72. <https://doi.org/10.14419/ijamr.v5i1.5666>
- Evans, D. J., & Raslan, K. R. (2005). The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(1), 49–54. <https://doi.org/10.1080/00207160412331286815>
- Hosseini, M. M., & Nasabzadeh, H. (2007). Modified Adomian decomposition method for specific second order ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 117–123. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.07.094>
- Jafari, H., & Daftardar-Gejji, V. (2006). Revised Adomian decomposition method for solving a system of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 1–7. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.07.010>
- Khanh, N. H. (2016). Stability analysis of an influenza virus model with disease resistance. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(2), 193–199. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.02.003>
- Mungkasi, S., & Ekaputra, I. M. W. (2018). Adomian decomposition method for solving initial value problems in vibration models. *MATEC Web of Conferences*, 159, 2007. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201815902007>
- Nhawu, G., Mafuta, P., & Mushanyu, J. (2016). *Journal of Mathematical and Computational Science*[[Elektronische Ressource]]: JMCS. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 6(3), 307–314.

UCAPAN TERIMAKASIH

Peneliti mengucapkan terima kasih kepada Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat (DRPM), Ditjen Penguatan Riset dan Pengembangan, Kemenristekdikti atas dukungan yang diberikan kepada peneliti berupa bantuan dana penelitian dengan skema Penelitian Dosen Pemula tahun 2019 yang menunjang berlangsungnya penelitian ini dengan baik.