PEMODELAN MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA PADA TITIK STAGNASI SILINDER ELIPTIK

(*MATHEMATICAL MODELLING OF FLUID FLOW AT STAGNATION POINT OF ELLIPTIC CYLINDER*)

Annisa Dwi Sulistyaningtyas[1]
[1]Universitas PGRI Adi Buana Surabaya, annisadwistyas@unipasby.ac.id

Abstrak

Titik stagnasi merupakan titik pada permukaan benda dimana kecepatan aliran fluida sama dengan nol. Titik tersebut terhambat tepat sejajar dengan sumbu y pada silinder eliptik yang mengakibatkan nilai $x \approx 0$. Dalam penelitian ini, diperoleh model matematika dari aliran fluida yang melewati permukaan silinder eliptik tepat pada titik stagnasi. Model matematika yang dihasilkan ditransformasikan ke dalam bentuk fungsi arus, sehingga mengakibatkan nilai kecepatan konstan sepanjang aliran fluida. Hasil penelitian ini adalah berupa model matematika aliran fluida pada titik stagnasi silinder eliptik dengan pengaruh bilangan Prandtl. Pada model matematika tersebut parameter bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan kecepatan dan temperatur aliran fluida. Semakin besar bilangan Prandtl yang diberikan, semakin rendah nilai kecepatan dan temperatur yang dihasilkan.

Kata kunci: *Model matematika, silinder eliptik, titik stagnasi, fungsi arus, bilangan Prandtl*

Abstract

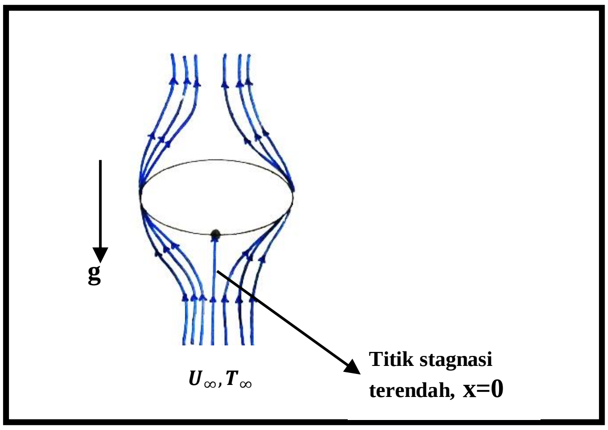
The stagnation point is the point on the surface of object where velocity of fluid flow is zero. The point is obstructed to the axis on the elliptic cylinder so that $x \approx 0$. In this study, the result is mathematical model of fluid flow on the surface of elliptic cylinder at stagnation point. The mathematical model is transformed into the stream function and resulting velocity value is constant along with fluid flow. The results of research are mathematical models of fluid flow at stagnation point of elliptic cylinder with Prandtl number effect. In the mathematial model, Prandtl number has a inversely propotional with velocity and temperature value. If Prandtl number increase, velocity and temperature decrease.

Keywords: *Mathematical model, elliptic cylinder, stagnation point, stream function, Prandtl number*

PENDAHULUAN

Pada saat ini, penelitian di bidang fluida semakin menarik perhatian banyak peneliti, khususnya dalam pengembangan di bidang industri dan manufaktur. Jenis fluida yang digunakan adalah jenis fluida non-Newtonian, yaitu fluida viskoelastik. Karakteristik fluida viskoelastik yang kental dan elastis mengakibatkan timbulnya lapisan batas pada aliran fluida yang melewati permukaan silinder eliptik. Aplikasi dalam bidang industri dan manufaktur membutuhkan model matematika yang dapat digunakan sebagai acuan atau dasar dalam penentuan nilai variabel atau parameter yang tepat.

Dalam penelitian ini, akan dibangun model matematika dari aliran fluida pada saat berada tepat pada titik stagnasi, yaitu titik pada permukaan benda dimana kecepatan aliran fluida sama dengan nol (Gambar 1.). Pada titik stagnasi tersebut aliran fluida terhambat tepat sejajar dengan sumbu y dalam silinder eliptik, yaitu nilai $x \approx 0$. Model matematika yang dihasilkan dari penurunan rumus persamaan massa, persamaan momentum, dan persamaan energi. Selanjutnya, ditransformasikan ke dalam bentuk fungsi arus sehingga mengakibatkan nilai kecepatan konstan sepanjang aliran fluida dan menghasilkan persamaan yang lebih sederhana, yaitu persamaan diferensial biasa. Selain itu, pemodelan matematika tersebut juga dipengaruhi oleh bilangan Prandtl (Pr) yang juga berpengaruh pada kecepatan dan temperatur aliran fluida.

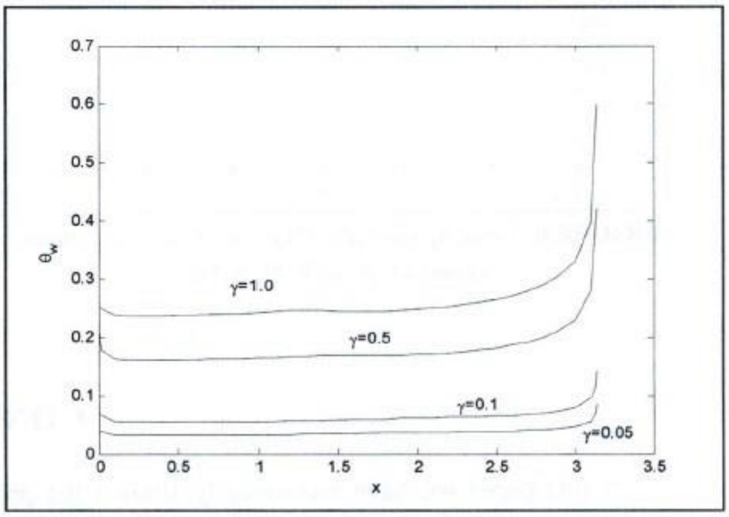


Gambar 1. Model fisik aliran fluida pada titik stagnasi silinder eliptik

Penelitian mengenai konveksi bebas pada silinder sirkular juga dilakukan oleh (Sarif et al., 2013). Penelitiannya menjelaskan tentang penyelesaian numerik dari konveksi bebas melalui silinder sirkular dengan menggunakan metode Box-Keller. Hasil penelitiannya adalah nilai numerik dari *skin friction* dan temperatur dinding pada titik stagnasi yaitu $x \approx 0$ dengan variasi bilangan Prandtl.

Tabel 1. Hasil penelitian Salleh dan Sarif yaitu nilai $f''(0)$ dan θ_0 dengan variasi bilangan Prandtl saat $K = 0$ dan $\gamma = 1$ pada titik stagnasi.

Pr	$f''(0)$		θ_0	
	Salleh and Nazar [9]	Present results	Salleh and Nazar [9]	Present results
0.5	26.7181	26.7182	92.1979	92.1980
1	11.8648	11.8648	35.4701	35.4701
2	5.7904	5.7903	15.7804	15.7803
3	3.9856	3.9856	10.5357	10.5357
7	2.0714	2.0714	5.2797	5.2797
10	1.5710	1.5711	4.2030	4.2031



Gambar 2. Distribusi temperatur dinding untuk $P\ r$ = 1000 dengan variasi parameter γ, (Sarif et al., 2013)

Hasil dari penelitian ini adalah model matematika aliran fluida viskoelastik pada titik stagnasi silinder eliptik dengan pengaruh bilangan Prandtl (Pr). Semakin besar bilangan Prandtl, semakin rendah pula kecepatan dan temperatur yang dihasilkan. Hal tersebut dikarenakan parameter *heat generation* berbanding lurus dengan variabel kecepatan (v) dan temperatur (θ).

METODE PENELITIAN

Studi Literatur

Tahap ini peneliti melakukan studi literatur terkait studi kasus dalam penelitian ini, yaitu tentang pemodelan matematika pada fluida viskoelastik dengan pengaruh bilangan Prandtl (Pr). Studi literatur yang terkait adalah literatur tentang aliran fluida, model matematika, karakteristik fluida viskoelastik, dan bilangan Prandtl (Pr).

Pengumpulan data penelitian

Tahap pengumpulan data penelitian, peneliti menentukan variabel-variabel yang mempengaruhi pembangunan model matematika, diantaranya *skin friction coefficient*, bilangan Grashoft, temperatur dinding, bilangan Prandtl (Pr), dan variabel-variabel yang berpengaruh lainnya.

Pembangunan model matematika

Tahap ini peneliti melakukan pembangunan model matematika yang merupakan pengembangan dari persamaan massa, persamaa momentum, dan persamaan energi. Pada bagian ini dikaji model matematika pada aliran tak tunak fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik dengan pengaruh bilangan Prandtl (Pr).

Langkah-langkah dalam membangun model adalah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan awal yang digunakan untuk membangun model matematika. Pada studi kasus ini, model matematika dibangun dari persamaan massa, persamaan momentum, dan persamaan energi;
2. Menentukan *boundary condition* yang digunakan dalam pembangunan model

matematika;
3. Mentransformasikan ke dalam bentuk persamaan non-dimensional dan selanjutnya dikelompokkan ke bentuk persamaan similaritas dengan menggunakan teori lapisan batas;
4. Mengubah model matematika menjadi bentuk yang lebih sederhana, yaitu menggunakan fungsi arus, sehingga didapatkan bentuk persamaan diferensial biasa;
5. Melakukan perhitungan pada titik stagnasi terendah, yaitu saat $x \approx 0$, sehingga didapatkan bentuk akhir dari model matematika dengan pengaruh bilangan Prandtl (Pr) yang berpengaruh pada kecepatan dan temperatur fluida.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Studi kasus yang digunakan dalam penelitian ini adalah tentang pembentukan model matematika dari suatu aliran fluida viskoelastik dengan sifat aliran tak tunak. Persamaan pembangun yang digunakan berasal dari persamaan massa, momentum, dan energi. Persamaan masa dan persamaan momentu, pada aliran *unsteady* adalah sebagai berikut (Burshtein et al., 2017):

$$\nabla \boldsymbol{V} = 0$$
$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u.\nabla \mathrm{u}\right) = -\nabla \mathrm{P} + \nabla \tau + F_x$$

atau dapat ditulis dengan
Persamaan massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Persamaan momentum:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x$$
$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \tag{2}$$

Persamaan energi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q_0}{\rho C_p}(T - T_\infty) \tag{3}$$

Selanjutnya gaya kental fluida (τ) diselesaikan dengan menggunakan tensor Walter-B yang didefinisikan sebagai berikut (Kasim, 2014):

$$\tau_{ij} = \mu_0(2d_{ij}) - k_0(2\hat{d}_{ij}) \tag{4}$$

dengan

$$\hat{d}_{ij} = \boldsymbol{V}.\nabla\left(d_{ij}\right) - \left(d_{ij}\right)(\nabla\mathbf{V})^{T} - \nabla.\boldsymbol{V}\left(d_{ij}\right) \tag{5}$$

dan

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \boldsymbol{V}_i}{\partial x_j}\right] \tag{6}$$

Pada studi kasus yang diambil dalam penelitian ini, tekanan hidrostatis aliran fluida didefinisikan sebagai berikut:

$$P = P_h + P_d$$

Tekanan hidrostatis merupakan tekanan pada medium tak bergerak, sehingga besar gravitasi yang diberikan

$$\nabla P_h = \rho_\infty g.$$

dengan ρ_∞ adalah densitas fluida. Oleh karena aliran fluida bergerak ke atas, yaitu berlawanan dengan g, maka didefinisikan:

$$\frac{\partial P_h}{\partial x} = -\rho_\infty g$$

Berdasarkan pendekatan *Boussinesq* dan teori lapisan batas, didefinisikan (Cheng, 2012):

$$g_x = -gsin\, A$$

dengan

$$sin\, A = \frac{b}{a}\frac{\sin B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}$$

Kemudian persamaan pembangun yang digunakan, yaitu persamaan (1)-(3), ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan non-dimensional, sehingga didapat persamaan berikut:
Persamaan massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + v\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right] - \theta \sin A \end{aligned} \tag{8}$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma\theta \tag{9}$$

Dengan kondisi batas:

$$\begin{gathered} u = v = 0,\ \ \theta' = -1 \quad on \ \ y = 0 \\ u = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \ \theta = 0 \quad as\ \ y \to \infty \end{gathered} \tag{10}$$

Selanjutnya didefinisikan:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha},\ \ K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2},\ \ \gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu C_p Gr^{1/2}}$$

untuk menyelesaikan Persamaan (7) sampai (9) dan dengan memperhatikan kondisi batas pada Persamaan (10), maka didefinisikan fungsi arus sebagai berikut (Kasim, 2014):

$$\psi = xf(x, y, t), \quad \theta = \theta(x, y, t) \tag{11}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{12}$$

Pada titik stagnasi terendah silinder, $x \approx 0$, diperoleh persamaan diferensial biasa dari Persamaan (11) dan (12) sebagai berikut:

$$f''' + ff'' - (f')^2 + \theta \sin A + K(2f'f''' - ff^{(4)} - (f'')^2) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' + \gamma\theta = 0 \tag{14}$$

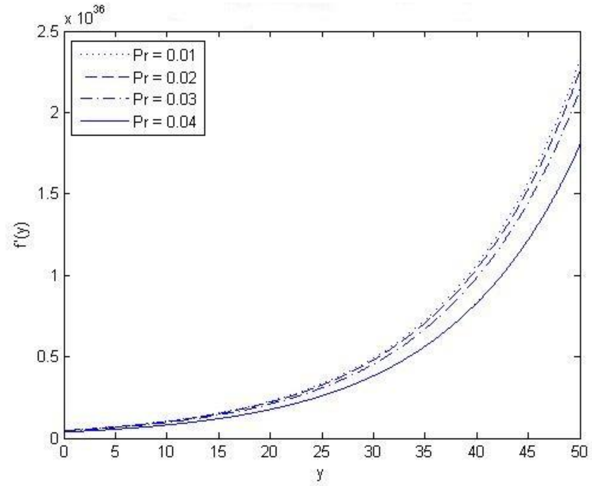
dengan kondisi batas:

$$\begin{gathered} f(0) = f'(0) = 0, \quad \theta'(0) = -1 \\ f'(\infty) = 0, \quad f''(\infty) = 0,\ \ \theta(\infty) = 0 \end{gathered}$$

dengan “ ‘ ” menotasikan turunan terhadap y.

Hasil Simulasi

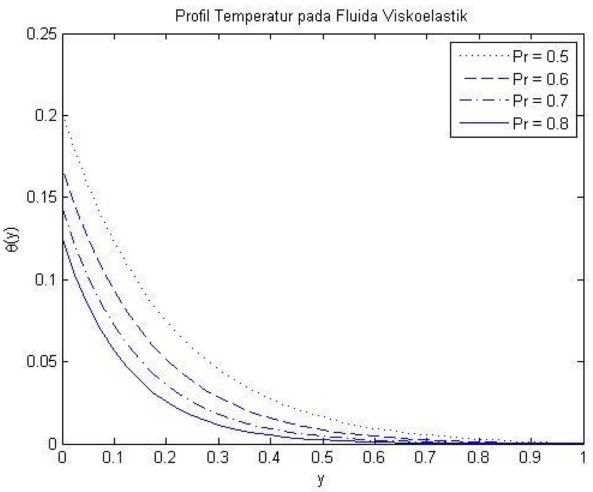
Berdasarkan model matematika pada persamaan (13) dan (14), yaitu model matematika aliran fluida viskoelastik pada titik stagnasi terendah ($x \approx 0$), selanjutnya dilakukan penyelesaian secara numerik dengan proses pendiskritan menggunakan metode beda hingga maka diperoleh hasil simulasi berupa profil kecepatan dan temperatur dari aliran fluida viskoelastik dengan pengaruh bilangan Prandtl sebagai berikut:



Gambar 3. Profil Kecepatan Aliran Fluida Viskoelastik

Pada Gambar 3 dijelaskan bahwa dengan variasi nilai bilangan Prandtl (Pr), yaitu Pr = 0.01, 0.02, 0.03, dan 0.04 didapatkan nilai maksimal kecepatan yang dihasilkan di sekitaran daerah titik stagnasi adalah 2,5 x 10^{36}. Sehingga dapat diketahui bahwa semakin besar bilangan Prandtl yang diberikan, semakin rendah pula kecepatan fluida yang dihasilkan.

Sedangkan pada Gambar 4, dijelaskan bahwa dengan variasi bilangan Prandtl (Pr), yaitu Pr = 0.5, 0.6, 0.7, dan 0.8 didapatkan nilai maksimal temperatur aliran fluida di sekitar titik stagnasi benda adalah 0.25. Sehingga, semakin besar bilangan Prandtl yang diberikan, maka semakin rendah temperatur fluida yang dihasilkan.



Gambar 4. Profil Temperatur Aliran Fluida Viskoelastik

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya, kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah pemodelan matematika dari aliran fluida yang melewati permukaan sebuah benda silinder eliptik pada titik stagnasi dibangun dari tiga persamaan pembangun. Tiga persamaan tersebut adalah persamaan massa, persamaan momentum, dan persamaan energi. Model matematika tersebut dipengaruhi oleh beberapa parameter, salah satunya adalah bilangan Prandtl (Pr) yang mempengaruhi variabel kecepatan dan temperatur, sehingga didapatkan model matematika sebagai berikut:

$$f''' + ff'' - (f')^2 + \theta \sin A + K(2f'f''' - ff^{(4)} - (f'')^2) = 0$$
$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' + \gamma\theta = 0$$

Penyelesaian secara numerik dengan menggunakan beda hingga dan dilanjutkan dengan simulasi menggunakan Matlab menyimpulkan bahwa bilangan Prandtl (Pr) berbanding terbalik dengan kecepatan (f) dan temperatur (θ), sehingga semakin besar bilangan Prandtl yang diberikan, semakin rendah pula kecepatan dan temperatur yang dihasilkan dari aliran fluida tersebut.

Selanjutnya, saran yang penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah gunakan penyelesaian numerik dengan metode lainnya, misalkan metode Box-Keller untuk mendapatkan grafik yang lebih stabil lagi.

DAFTAR RUJUKAN

Burshtein, N., Zografos, K., Shen, A. Q., Poole, R. J., & Haward, S. J. (2017). Inertioelastic flow instability at a stagnation point. *Physical Review X*. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.041039

Cheng, C. Y. (2012). Free convection of non-Newtonian nanofluids about a vertical truncated cone in a porous medium. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2012.08.004

Kasim, A. R. M. (2014). Convective Boundary Layer Flow of Viscoelastic Fluid. In *Universiti Teknologi Malaysia, Faculty of Science: Ph. D. Thesis*.

Sarif, N. M., Salleh, M. Z., & Nazar, R. (2013). Numerical solution of flow and heat transfer over a stretching sheet with newtonian heating using the keller box method. *Procedia Engineering*. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.02.070