EKSISTENSI ALJABAR LIE FROBENIUS SEBAGAI JUMLAH LANGSUNG DARI ALJABAR LIE FILIFORM BERDIMENSI SAMPAI DENGAN 6 DENGAN SPLIT TORUS

(THE EXISTENCE OF FROBENIUS LIE ALGEBRA AS A DIRECT SUM OF A FILIFORM LIE ALGEBRA OF DIMENSION UP TO 6 WITH SPLIT TORUS)

Edi Kurniadi[1]
[1]Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran, edi.kurniadi@unpad.ac.id

Abstrak

Misalkan P aljabar Lie Filiform hingga berdimensi sampai dengan 6. Dalam artikel ini, dibangun suatu split torus Γ (jika ada) yang merupakan aljabar bagian komutatif dari turunan P sedemikian sehingga aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang merupakan jumlah langsung dari P dan Γ adalah aljabar Lie Frobenius. Lebih jauh, dalam artikel ini dibuktikan bahwa untuk aljabar Lie Filiform standar P yang berdimensi 5 dan 6 yang diberikan tidak terdapat split torus Γ sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius. Sementara itu, untuk aljabar Lie Filiform non-standar berdimensi 5 yang diberikan maka terdapat split torus Γ sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P} \oplus \Gamma$ adalah aljabar Lie Frobenius berdimensi 6.

Kata kunci: Aljabar Lie Filiform**,** Aljabar Lie Frobenius, Jumlah Langsung, , Split Torus, Turunan Aljabar Lie.

Abstract

Let P be any filiform Lie algebra of dimension up to 6*. We shall find (if any) a split torus Γ which is a commutative Lie subalgebra of a derivation of P such that a Lie algebra $\mathfrak{g}$ in the terms of direct sum of P and Γ is a Fobenius Lie algebra. Furthermore, we shall show that for a given standard filiform Lie algebra P with dimension* 5 *and* 6 *there is no a split torus Γ such that $\mathfrak{g} = \mathrm{P} \oplus \Gamma$ is Frobenius Lie algebra. However for nonstandard filiform Lie algebra of dimension* 5*, we can find a split torus Γ such that $\mathfrak{g} = P \oplus \Gamma$ is a Frobenius Lie algebra of dimension 6.*

Keywords: *Derivation of Lie algebra, Direct sum, Filiform Lie algebras, Frobenius Lie algebra, Split torus.*

PENDAHULUAN

Gagasan tentang aljabar Lie Frobenius diperkenalkan pertama kali oleh (Ooms, 1976) dan (Ooms, 1980) ketika membuktikan bahwa *universal enveloping algebra* dari suatu aljabar Lie Frobenius adalah primitif atau mempunyai modul sederhana *faithful*. Selanjutnya, dalam penelitian terbarunya (Ooms, 2009) memberikan cara perhitungan polinom invarian dan semi invarian aljabar Lie Frobenius termasuk di dalamnya bagaimana mendapatkan suatu aljabar Lie Frobenius dari suatu aljabar Lie. Dalam artikel sebelumnya, (Kurniadi, 2020) telah memperoleh hasil bahwa untuk aljabar Lie nilpoten tak komutatif N berdimensi ≤ 4 yang diberikan senantiasa terdapat split torus Γ yang berdimensi 1 atau 2 sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ adalah aljabar Lie Frobenius. Lebih jelasnya, berikut hasil utama dalam (Kurniadi, 2020) yang telah diperoleh

Proposisi 1. (Kurniadi, 2020)**.** *Diberikan aljabar Lie nilpoten tak komutatif* N *yang berdimensi* ≤ 4 *, maka terdapat split torus* $\Gamma \subset \mathrm{Der}\ \mathrm{N}$ *berdimensi satu atau dua (bergantung pada* N *yang diberikan) sedemikian sehingga* $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ *adalah aljabar Lie Frobenius yang berdimensi* ≤ 6.

Dalam artikel ini, aljabar Lie P yang diberikan untuk mengonstruksi aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}$ (jika ada) adalah aljabar Lie filiform berdimensi ≤ 6. Berikut adalah daftar aljabar Lie filiform tak komutatif berdimensi ≤ 6 yang telah diklasifikasikan oleh (Hadjer & Makhlouf, 2012) beserta *bracket* tak nolnya.

1. Dimensi 3

$$(\mathrm{P}_3) : [e_1, e_2] = e_3. \tag{1}$$

2. Dimensi 4

$$(\mathrm{P}_4) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4. \tag{2}$$

3. Dimensi 5

$$(\mathrm{P}_{5,1}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5.$$

$$(\mathrm{P}_{5,2}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5. \tag{3}$$

4. Dimensi 6

$$(\mathrm{P}_{6,1}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6.$$

$$(\mathrm{P}_{6,2}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6, [e_2, e_3] = e_6.$$

$$(\mathrm{P}_{6,3}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6,$$
$$[e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_4] = -e_6.$$

$$(\mathrm{P}_{6,4}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6,$$
$$[e_2, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_6.$$

$$(\mathrm{P}_{6,5}) : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_1, e_5] = e_6,$$
$$[e_2, e_3] = e_5 - e_6, [e_2, e_4] = e_6, [e_2, e_5] = e_6, [e_3, e_4] = -e_6. \tag{4}$$

Untuk kasus aljabar Lie filiform berdimensi 3 dan 4 dengan *bracket* diberikan dalam Pers. (1) dan (2) masing-masing, telah dibahas oleh (Kurniadi, 2020) dengan hasilnya adalah Proposisi 1 di atas. Aljabar Lie filiform $\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_{5,1}$, dan $\mathrm{P}_{6,1}$ disebut **aljabar Lie filiform standar** sedangkan aljabar Lie filiform lainnya kita namakan **aljabar Lie filiform non-standar.** Selanjutnya, untuk kasus aljabar Lie filiform berdimensi 5 dan 6 kita peroleh konjektur sebagai berikut.

Konjektur 1. *Misalkan* P *aljabar Lie filiform standar berdimensi* 5 *atau* 6 *maka tidak terdapat split torus* Γ *berdimensi* 1, 2, 3 *atau* 4 (*tergantung* P *yang diberikan*) *sedemikian sehingga* $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ *aljabar Lie Frobenius dengan dimensi* ≤ 8 *atau* ≤ 10.

Sebagai catatan bahwa hasil dalam Konjektur 1 berbeda dengan hasil dalam Proposisi 1 di atas. Dengan kata lain, untuk aljabar Lie filiform standar P berdimensi 3 dan 4 senantiasa terdapat split torus Γ sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ adalah aljabar Lie Frobenius.

Konjektur 2. *Misalkan* $\mathrm{P}_{5,2}$ *aljabar Lie filiform non-standar berdimensi* 5 *maka terdapat split torus* Γ *berdimensi satu sedemikian sehingga* $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ *adalah aljabar Lie Frobenius berdimensi 6 .*

Dalam Hasil dan Pembahasan, kedua konjektur di atas dibuktikan dan hasil yang kita peroleh khususnya Konjektur 2 ternyata memberikan alternatif lain untuk menghitung suatu indeks aljabar Lie filiform non-standar berdimensi 5 sebagaimana telah diperoleh dalam hasil (Hadjer and Makhlouf, 2012) tentang indeks aljabar Lie filiform. Untuk kasus aljabar Lie filiform berdimensi 6, dalam makalah ini hanya akan dibahas untuk untuk aljabar Lie filiform standarnya.

Sistematika penulisan makalah ini terdiri dari pendahuluan yang membahas *state of art* penelitian ini dan membahas landasan teori yang digunakan. Bagian selanjutnya adalah metode penelitian, hasil dan pembahasan yaitu pembuktian konjektur 1 dan konjektur 2, dan bagian terakhir makalah ini adalah kesimpulan dan saran. Selanjutnya beberapa notasi yang penting dalam penelitian ini akan dibahas secara singkat seperti aljabar Lie Frobenius, aljabar Lie Filiform, turunan suatu aljabar Lie, dan split torus.

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie real dengan basis $S := \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Misalkan $A \coloneqq [e_i, e_j]$ matriks yang entri-entrinya merupakan *bracket* dari S. Dengan kata lain matriks A berbentuk.

$$A = \begin{bmatrix} [e_1, e_1] & [e_1, e_2] & \cdots & \cdots & [e_1, e_n] \\ [e_2, e_1] & [e_2, e_2] & \cdots & \cdots & [e_2, e_n] \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_n, e_1] & [e_n, e_2] & \cdots & [e_n, e_{n-1} & [e_n, e_n] \end{bmatrix} \tag{5}$$

Definisi 1 (Ooms, 1980) *Aljabar Lie real* $\mathfrak{g}$ *dengan basis* $S := \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ *dengan* n *genap dikatakan Frobenius jika determinan matriks* A *pada Persamaan* (5) *tidak sama dengan nol.*

Penjelasan tentang Definisi 1 ini diberikan melalui contoh-contoh sebagai berikut. Aljabar Lie *affine* $\mathrm{aff}(1) = \mathrm{Span}\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ berdimensi 2 dengan *bracket* tak nolnya adalah $[\vartheta_1, \vartheta_2] = \vartheta_2$ adalah aljabar Lie Frobenius karena

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_2 \\ -\vartheta_2 & 0 \end{bmatrix} = \vartheta_2^2 \neq 0. \tag{6}$$

Contoh lainnya adalah aljabar Lie real berdimensi 4 dengan basis basis $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ dan *bracket* tak nolnya adalah $[Y_1, Y_2] = \frac{1}{2}Y_2 + Y_3$, $[Y_3, Y_1] = -\frac{1}{2}Y_3$, $[Y_4, Y_1] = -Y_4$, $[Y_3, Y_2] = -Y_4$ adalah aljabar Lie Frobenius karena

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}Y_2 + Y_3 & \frac{1}{2}Y_3 & Y_4 \\ -\frac{1}{2}Y_2 - Y_3 & 0 & Y_4 & 0 \\ -\frac{1}{2}Y_3 & -Y_4 & 0 & 0 \\ -Y_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Y_2Y_4^3 \neq 0. \qquad (7)$$

Pangkat n dari suatu aljabar Lie real $\mathfrak{g}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \ldots, \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] \qquad (8)$$

dengan $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definisi 2 (Hadjer & Makhlouf, 2012)**.** *Aljabar Lie real* $\mathfrak{g}$ *dikatakan nilpoten jika terdapat bilangan bulat posistif* n *sedemikian sehingga* $\mathfrak{g}^{n} = \{0\}$*. Bilangan bulat positif terkecil* k *sedemikian sehingga* $\mathfrak{g}^k = \{0\}$ *disebut nilindeks dari* $\mathfrak{g}$.

Aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ dengan *bracket* tak nolnya adalah $[\varepsilon_3, \varepsilon_2] = \varepsilon_1$ adalah contoh Aljabar Lie nilpoten karena terdapat $n = 2$ sedemikian sehingga $\mathfrak{g}^2 = \{0\}$.

Definisi 3 (Hadjer & Makhlouf, 2012)**.** *Aljabar Lie real* $\mathfrak{g}$ *berdimensi* n *dikatakan filiform jika nilindeksnya sama dengan* $n - 1$.

Aljabar Lie Heisenberg berdimensi 3 adalah contoh aljabar Lie filiform karena nilindeknyanya sama dengan 2.

Definisi 4 (Hilgert and Neeb, 2012)**.** *Turunan aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *adalah pemetaan linear* $\Xi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *yang memenuhi kondisi berikut ini*

$$\Xi([\Phi_1, \Phi_2]) = [\Xi(\Phi_1), \Phi_2] + [\Phi_2, \Xi(\Phi_2)], \forall \quad \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{g}. \qquad (9)$$

Himpunan semua turunan dari $\mathfrak{g}$ *dinotasikan dengan* $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$. *Yaitu*

$$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \{\Xi \;\; ; \;\; \Xi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \text{ turunan } \mathfrak{g}\}$$

Definisi 5(Ooms, 2009)**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie real.* Γ *dikatakan split torus jika* Γ *aljabar bagian komutatif dari* $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ *yang memuat turunan yang dapat didiagonalkan.*

Aljabar Lie Heisenberg dengan basis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ mempunyai matriks turunan berbentuk

$$\Theta \coloneqq \begin{bmatrix} \omega_1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \omega_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \omega_1+\omega_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \omega_i, \alpha_k \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Dalam hal ini kita bisa memilih split torus Γ yang dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\Gamma \coloneqq \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1+\omega_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2\}. \quad (11)$$

METODE

Metode penelitian yang digunakan berupa studi literatur khususnya tentang kelas isomorfisma aljabar Lie filiform P berdimensi ≤ 6 (Hadjer & Makhlouf, 2012). Selanjunya dihitung split torus Γ untuk menunjukkan apakah jumlah langsung dari P dan Γ adalah aljabar Lie Frobenius. Hasil penelitian (Ayala, Kizil, & Tribuzy, 2012) sangat membantu dalam menghitung split torus Γ. Lebih detail tentang cara perhitungan split torus Γ dapat dilihat dalam penelitian sebelumnya tentang konstruksi aljabar Lie Frobenius (Kurniadi, 2020).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pertama kita buktikan Konjektur 1 di atas. Kita klaim bahwa Konjektur 1 tersebut benar sehingga kita peroleh proposisi sebagai berikut :

Proposisi 2. *Misalkan* P *aljabar Lie filiform standar berdimensi* 5 *atau* 6 *maka tidak terdapat split torus* Γ *berdimensi* 1, 2, 3 *atau* 4 (*tergantung* P *yang diberikan*) *sedemikian sehingga* $\mathfrak{g} = \mathrm{N} \oplus \Gamma$ *aljabar Lie Frobenius dengan dimensi* ≤ 8 *atau* ≤ 10.

Bukti. Kita bagi menjadi dua kasus yaitu untuk aljabar Lie filiform standar $\mathrm{P}_{5,1}$ berdimensi 5 dan aljabar Lie filiform standar $\mathrm{P}_{6,1}$ berdimensi 6 dengan *bracket* tak nolnya diberikan oleh Pers. (3) dan (4).

- Aljabar Lie filiform standar $\mathrm{P}_{5,1}$ berdimensi 5.

Andaikan terdapat split torus Γ sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ adalah aljabar Lie Frobenius. Dengan menghitung turunan $\mathrm{P}_{5,1}$, maka elemen split torus Γ berbentuk $\mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, 3\omega_1+\omega_2\}$ dengan ω_i $(i = 1,2) \in \mathbb{R}$. Karena indeks $\mathrm{P}_{5,1}$ adalah 3 dan dimensi aljabar Lie Frobenius selalu genap maka dimensi yang mungkin untuk $\mathfrak{g}$ adalah 6 atau 8. Artinya split torus Γ yang bisa kita pilih adalah berdimensi 1 atau 3. Jika kita pilih split torus $\Gamma \coloneqq \mathrm{Span}\,\{t\}$ berdimensi 1 dengan $t = \mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, 3\omega_1+\omega_2\}$ dengan $\omega_1\omega_2 \neq 0$ maka $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius berdimensi 6 dan matriks *bracket*-nya berbentuk

$$\Theta \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 e_1 & \omega_2 e_2 & (\omega_1+\omega_2)e_3 & (2\omega_1+\omega_2)e_4 & (3\omega_1+\omega_2)e_5 \\ -\omega_1 e_1 & 0 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 \\ -\omega_2 e_2 & -e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\omega_1+\omega_2)e_3 & -e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(2\omega_1+\omega_2)e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(3\omega_1+\omega_2)e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Hal ini tidak mungkin terjadi karena kontradiksi dengan determinan matriks Θ sama dengan nol. Kasus $\omega_1 = \omega_2 = 0$ adalah trivial karena matriks yang mempunyai baris atau kolom nol determinannya sama dengan nol. Dengan kata lain, untuk sembarang split torus Γ berdimensi 1 jumlah langsung $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ bukan aljabar Lie Frobenius.

Sekarang andaikan ada split torus $\Gamma \coloneqq \mathrm{Span}\{\mathrm{t}_1, t_2, t_3\}$ berdimensi 3 sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius berdimensi 8. Hal ini tidak mungkin terjadi. Perhatikan bahwa jika ada split torus Γ berdimensi 3 dengan t_i $(i = 1,2,3)$ berbentuk $\mathrm{diag}\{\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 + \omega_2, 3\omega_1 + \omega_2\}$ maka himpunan $\{t_1, t_2, t_3\}$ harus bebas linear. Misalkan $\Gamma_1 \coloneqq \mathrm{Span}\{\mathrm{t}_1, t_2\}$ dengan $t_1 \coloneqq \mathrm{diag}\{p, q, p+q, 2p+q, 3p+q\}$ dan $t_2 \coloneqq \mathrm{diag}\{r, s, r+s, 2r+s, 3r+s\}$ dan memenuhi $\det\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix} \neq 0$. Akan dibuktikan bahwa $\{t_1, t_2\}$ bebas linear maksimal. Misalkan kita sisipkan $t_3 = \mathrm{diag}\{t, u, t+u, 2t+u, 3t+u\}$ ke himpunan $\{t_1, t_2\}$. Kita buktikan bahwa himpunan $\{t_1, t_2, t_3\}$ tidak bebas linear lagi. Perhatikan persamaan

$$\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3 = \bar{0}. \tag{13}$$

Karena terdapat skalar $\mu_1 = pur + tqr - qtr - tps, \mu_2 = pu - qt$, dan $\mu_3 = ps - qr$ yang semuanya tak nol maka $t_3 \in \mathrm{Span}\{t_1, t_2\}$. Dengan kata lain, himpunan $\{\mathrm{t}_1, t_2, t_3\}$ tidak bebas linear. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan $\{t_1, t_2\}$ bebas linear maksimal. Artinya matriks *bracket* dari aljabar $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ dengan Γ berdimensi 3 sama dengan nol. Oleh karena itu, tidak terdapat split torus Γ sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,1} \oplus \Gamma$ Frobenius Lie algebra berdimensi 8. Jadi, untuk kasus aljabar Lie filiform $\mathrm{P}_{5,1}$ berdimensi 5 Proposisi 2 di atas benar.

- Aljabar Lie filiform $\mathrm{P}_{6,1}$ berdimensi 6.

Argumen untuk kasus Aljabar Lie filiform $\mathrm{P}_{5,1}$ berdimensi 5 dapat kita gunakan untuk $\mathrm{P}_{6,1}$. Dalam hal ini tidak terdapat split torus Γ yang berdimensi 2 atau 4 sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{6,1} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius berdimensi 8 atau 10. Oleh karena itu, Proposisi 2 benar untuk kasus $\mathrm{P}_{6,1}$. Jadi Proposisi 2 benar untuk aljabar Lie filiform berdimensi 5 atau 6. ■

Kedua kita buktikan Konjektur 2 di atas. Kita klaim bahwa Konjektur 2 tersebut benar sehingga kita peroleh proposisi sebagai berikut :

Proposisi 3. *Misalkan* $\mathrm{P}_{5,2}$ *aljabar Lie filiform non-standar berdimensi* 5 *dengan bracket tak nolnya diberikan oleh Pers.* (3) *maka terdapat split torus* Γ *berdimensi satu sedemikian sehingga* $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,2} \oplus \Gamma$ *adalah aljabar Lie Frobenius berdimensi 6 .*

Bukti. Pertama kita pilih split torus $\Gamma = \mathrm{Span}\{t\}$ dengan $t = \mathrm{diag}\{\Delta, \nabla, \Delta + \nabla, 2\Delta + \nabla, 3\Delta + \nabla\}$. Khusunya ketika $\Delta = 1$ dan $\nabla = 1$ maka $t = \mathrm{diag}\{1,2,3,4,5\}$. Jadi, basis untuk $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,2} \oplus \Gamma$ adalah $\{t, e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\}$. Karena matriks *bracket* $\mathfrak{g}$ berikut ini

$$\Pi := \begin{bmatrix} 0 & e_1 & 2e_2 & 3e_3 & 4e_4 & 5e_5 \\ -e_1 & 0 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 \\ -2e_2 & -e_3 & 0 & e_5 & 0 & 0 \\ -3e_3 & -e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 \\ -4e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

mempunyai determinan $25e_5^6 \neq 0$ maka $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,2} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius berdimensi 6. ■

Karena terdapat split torus Γ berdimensi 1 sedemikian sehingga $\mathfrak{g} = \mathrm{P}_{5,2} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius maka dengan menggunakan Teorema 3.5 halaman 1299 dalam artikel (Ooms, 2009) dimensi Γ sama dengan indeks $\mathrm{P}_{5,2}$ yaitu 1. Hal ini sejalan dengan hasil (Hadjer and Makhlouf, 2012) Proposisi 15 halaman 6 bahwa indeks $\mathrm{P}_{5,2}$ adalah 1.

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil yaitu jika diberikan aljabar Lie filiform standar P berdimensi 5 atau 6 maka untuk setiap split torus Γ jumlah langsung $\mathfrak{g} = \mathrm{P} \oplus \Gamma$ bukan aljabar Lie Frobenius. Sedangkan jika diberikan aljabar Lie filiform nonstandar P berdimensi 5 maka ada split torus Γ berdimensi satu sedemikian sehingga jumlah langsung $\mathfrak{g} = \mathrm{P} \oplus \Gamma$ aljabar Lie Frobenius berdimensi 6. Saran yang dapat diambil dari penelitian ini yaitu untuk menyelidiki eksistensi split torus Γ khususnya untuk kasus aljabar Lie filiform non-standar P berdimensi 6 dan kasus aljabar Lie filiform lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Ayala, V., E. Kizil, and I. D. A. Tribuzy. ‘On an algorithm for finding derivations of lie algebras’. *Proyecciones Journal of Mathematics* 31,1(2012):81–90.

Hadjer, A., and A. Makhlouf. ‘Index of Graded Filiform and Quasi Filiform Lie Algebras’ ,May 2014(2012).

Hilgert, J., and K.-H. Neeb. *Structure and Geometry of Lie Groups*. New York: Springer Monographs in Mathematics, Springer. 2012.

Kurniadi, E. ‘Konstruksi Aljabar Lie Frobenius Real dari Aljabar Lie Nilpoten Tak Komutatif Berdimensi ≤ 4’. *Submitted to Jurnal Ilmu Dasar FMIPA Unej* (2020).

Ooms. ‘On Lie algebras with primitive envelopes, supplements’. *Proc.Amer.Math.Soc* 58(1976):67–72.

Ooms, A. I. ‘On frobenius Lie algebras’. *Comm. Algebra* 8(1980):13--52.

Ooms, A. I. ‘Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras’. *J. Algebra* 321(2009):1293--1312.