
**PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ABELIAN
MENGUNAKAN METODE PERTURBASI HOMOTOPI
TRANSFORMASI ELZAKI**

***(THE SOLUTION OF ABELIAN DIFFERENTIAL EQUATION USING
ELZAKI TRANSFORM HOMOTOPY PERTURBATION METHOD)***

Wartono

Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode transformasi Elzaki perturbasi homotopi merupakan salah satu metode semi analitik yang dikonstruksi menggunakan kombinasi metode transformasi Elzaki dan metode perturbasi homotopi. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik linear maupun nonlinear dalam bentuk deret polinomial. Artikel ini membahas penyelesaian persamaan diferensial Abelian jenis pertama menggunakan metode perturbasi homotopi transformasi Elzaki. Simulasi numerik diberikan untuk menguji konvergensi penyelesaian hampiran dengan menggunakan dua contoh. Hasil kajian menunjukkan bahwa metode tersebut dapat menyelesaikan persamaan diferensial Abelian. Nilai-nilai penyelesaian hampiran juga di plot dalam bentuk grafik untuk beberapa jumlah suku-suku solusi hampiran. Hasil plot menunjukkan bahwa pola kurva yang dibentuk cenderung teratur.

Kata kunci: Deret polinomial, metode transformasi Elzaki perturbasi homotopi, persamaan diferensial Abelian tipe pertama, simulasi numerik.

Abstract

The homotopy perturbation Elzaki transform method is one of semi-analytic methods constructed using a combination of Elzaki transform method and homotopy perturbation method. This method is used to solve a ordinary differential equation either of linear or nonlinear into a polynomial series. This paper discusses a solution of Abelian differential equation of the first kind using the Elzaki transform homotopy perturbation method. Numerical simulation is given to test the convergence of its approximation solution using two examples. The result of study shows that the method is able to solve the ordinary differential equation. The value of the approximation solutions are plotted graphically for several term of the approximation solutions. The results shows that the pattern of the formed curves tend regulary.

Keywords: *Polynomial series, homotopy perturbation Elzaki transform method, the first kind Abelian differential equation, numerical simulation.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial, baik bentuk elementer maupun parsial, merupakan representasi model matematis yang menggambarkan fenomena nyata yang muncul

pada persoalan bidang sains, teknik, rekayasa, biomedis, ekologi dan ekonomi (Braun, 1992; Schiesser, 2014)

Salah satu bentuk persamaan diferensial elementer, yaitu persamaan diferensial Abelian. Secara umum, persamaan diferensial Abelian terbagi menjadi dua jenis, yaitu persamaan diferensial abelian jenis pertama dan kedua yang masing-masing di tulis dalam bentuk (Polyanin & Zaitsev, 1995)

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3, \text{ dengan } f_3(x) \neq 0, \quad (1)$$

dan

$$(h_0(x) + h_1(x)y) \frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3. \quad (2)$$

Hampir sebagian besar persamaan diferensial yang muncul sebagai model matematis dari fenomena-fenomena tersebut tidak mudah untuk menentukan penyelesaian eksplisitnya. Oleh karena itu, beberapa metode penyelesaian persamaan diferensial muncul dengan melibatkan bentuk-bentuk deret pangkat atau polinomial. Penyelesaian numerik dalam bentuk deret pangkat atau polinomial biasanya disebut penyelesaian semi-analitik.

Beberapa peneliti telah menggunakan dan mengimplementasikan metode semi analitik untuk menyelesaikan berbagai persoalan persamaan diferensial baik elementer maupun parsial, misalnya metode dekomposisi Adomian (Adomian, 1990; Wartono & Muda, 2011), metode dekomposisi Adomian Laplace (Wartono & Muhajir, 2013; Wazwaz & Mehanna, 2010), metode analisa homotopi (Liao, 2004; Wibowo et al., 2013), metode perturbasi homotopi (Aldilla et al., 2012; He, 1999), metode transformasi diferensial (Jang et al., 2000; Khatizah et al., 2015), metode iterasi variasi (He, 1997; Wartono et al., 2020), metode transformasi Elzaki (Elzaki, 2011; Minarti et al., 2015), metode transformasi Sumudu (Watugala, 1993).

Pada artikel ini, penulis akan menentukan penyelesaian hampiran persamaan diferensial Abelian jenis pertama dengan menggunakan kombinasi metode transformasi Elzaki (Elzaki, 2011), dan polinomial perturbasi homotopi (sebagian peneliti menyebutnya polinomial He) yang dikembangkan oleh Ghorbani (Ghorbani, 2009). Konsep perturbasi pertama kali di kembangkan oleh Nayfeh (Nayfeh, 1985). Pada proses menentukan penyelesaian persamaan diferensial, polinomial He digunakan untuk mendekomposisi bentuk-bentuk nonlinear pada persamaan diferensial tersebut. Kombinasi dua metode ini sering disebut metode transformasi Elzaki perturbasi homotopi (*homotopy perturbation Elzaki transform method* atau HPETM).

Beberapa implementasi metode perturbasi homotopi transformasi Elzaki pada beberapa persoalan nilai awal, seperti : persamaan diferensial parsial nonlinear (Elzaki & Hilal, 2012), persamaan Sine-Gorden dan Klein-Gorden (Hesameddini & Abdollahy, 2013), Sistem persamaan parsial nonlinear (Elzaki & Biazar, 2013), persamaan dinamika gas (Bhadane & Pradhan, 2013), persamaan Burger (Suleman et al., 2016), persamaan diferensial fraksional nonlinear (Singh & Sharma, 2020).

Pada artikel ini, penulis menggunakan metode perturbasi homotopi transformasi Elzaki untuk menyelesaikan persamaan Abelian jenis pertama yang diberikan pada Persamaan (1). Selanjutnya, untuk menguji metode perturbasi homotopi transformasi Elzaki, pada bagian akhir diberikan simulasi numerik dengan mengimplementasikan metode tersebut pada beberapa contoh bentuk

khusus persamaan diferensial Abelian jenis pertama. Hasil beberapa penyelesaian hampiran juga diplot untuk menentukan kecenderungan kurva yang dibentuk. Selain itu, solusi hampiran yang dihasilkan HPETM dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian (*Adomian decomposition method* atau ADM) dan Metode Runge Kutta Orde Empat (RK-4).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Transformasi Elzaki- Homotopi Perturbasi

Selanjutnya pertimbangkan sebuah persamaan diferensial elementer nonlinear yang ditulis dalam bentuk umum (Adomian, 1990):

$$Ly(x) + Ry(x) + Ny(x) + g(x) = 0, \quad y(0) = f(x), \quad (3)$$

dengan L adalah operator linear yang didefinisikan sebagai $\frac{d}{dx}(\cdot)$, R adalah operator linear yang ordenya lebih rendah dari L dan N adalah operator nonlinear. Implementasi metode Elzaki terhadap persamaan (3) memberikan

$$\frac{1}{v} E[Ly(x)] - vy(0) = -E[Ry(x) + Ny(x) + g(x)], \quad (4)$$

atau

$$y(x) = f(x) - E^{-1}[vE[g(x)]] - E^{-1}[vE[Ry(x) + Ny(x)]], \quad (5)$$

dengan E adalah operator transformasi Elzaki, dan v adalah faktor dari variabel bebas t (Elzaki, 2011). Bentuk $y(x)$, $Ry(x)$ dan $Ny(x)$ di aproksimasi menggunakan polinomial He dalam bentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x), \quad Ry(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n Ry_n(x), \quad \text{dan} \quad Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(y), \quad (6)$$

dengan

$$H_n(y_0, y_1, \dots, y_k) = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial p} N\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n\right)_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Substitusi polinomial He (6) ke Persaman (5), maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) = f(x) - E^{-1}[vE[g(x)]] - E^{-1}\left[vE\left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n Ry_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(y)\right]\right]. \quad (8)$$

Nilai y_0, y_1, y_2, \dots diperoleh dengan menggunakan perbandingan koefisien p . Oleh karena itu, berdasarkan Persamaan (8) diperoleh nilai pendekatan y_0, y_1, y_2, \dots dalam bentuk

$$p^0 : y_0(x) = f(x) - E^{-1}[vE[g(x)]], \quad (9.a)$$

$$p^1 : y_1(x) = -E^{-1}\left[vE[Ry_0(x) + H_0(y)]\right], \quad (9.b)$$

$$p^2 : y_2(x) = -E^{-1}\left[vE[Ry_1(x) + H_1(y)]\right], \quad (9.c)$$

$$p^3 : y_3(x) = -E^{-1}\left[vE[Ry_2(x) + H_2(y)]\right], \quad (9.d)$$

⋮

Berdasarkan Persamaan (9.a) – (9.d) diperoleh penyelesaian untuk $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ dalam bentuk umum

$$y_0(x) = f(x) - E^{-1}[vE[g(x)]], \quad (10.a)$$

$$y_{n+1}(x) = -E^{-1}[vE[Ry_n(x) + H_n(y_0, y_1, \dots, y_n)]], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.b)$$

Penyelesaian (5) diperoleh dengan menjumlahkan nilai-nilai hampiran y_0, y_1, y_2, \dots dalam bentuk

$$y(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x), \quad (11)$$

atau

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots \quad (12)$$

Misalkan solusi hampiran ϕ_k adalah solusi hampiran pada iterasi ke- k yang diberikan oleh

$$\phi_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k(x), \quad (13)$$

maka

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(x).$$

Metode Pertubasi Homotopi pada Persamaan Diferensial Abelian Jenis Pertama

Berikut ini adalah persamaan diferensial abel jenis pertama :

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^3 f_n(x)y^n, \quad (14)$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3, \quad (15)$$

dengan syarat awal $y(0) = c$ dimana $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ fungsi linear atau nonlinear dan c adalah konstanta.

Untuk menentukan penyelesaian persamaan (15), maka terlebih dahulu mengubah Persamaan (15) ke bentuk transformasi Elzaki yaitu:

$$\frac{1}{v} E[y(x)] - vy(0) = E[f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3]. \quad (16)$$

Oleh karena $y(0) = c$, maka Persamaan (16) menjadi

$$E[y(x)] = v^2 c + vE[f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3]. \quad (17)$$

Gunakan sifat-sifat transformasi Elzati (Elzati 2011), maka Persamaan (17) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$y(x) = c + E^{-1} \left[vE[f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3] \right]. \quad (19)$$

Selanjutnya untuk mengaproksimasi bentuk $y(x)$, baik yang linear maupun nonlinear, digunakan polinomial He dalam bentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x), \quad y(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{1,n}(y_0, y_1, \dots, y_n),$$

dan

$$y(x)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{2,n}(y_0, y_1, \dots, y_n), \quad (20)$$

sehingga dengan mensubstitusikan kembali (20) ke (19) maka diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) = c + E^{-1} [vE[f_0(x)]] + pE^{-1} \left[vE \left[f_1(x) \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) + f_2(x) \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{1,n}(x) + f_3(x) \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{2,n}(x) \right] \right], \quad (21)$$

dengan $H_{1,n}(x)$ dan $H_{2,n}(x)$ merupakan polinomial He yang didefinisikan oleh Persamaan (7).

Untuk menentukan nilai y_0, y_1, y_2, \dots , bandingkan koefisien p berdasarkan pada orde pertubasi dan diperoleh

$$p^0 : y_0 = c + E^{-1} [vE[f_0(x)]], \quad (22.a)$$

$$p^1 : y_1 = E^{-1} [vE[f_1(x)y_0 + f_2(x)y_0^2 + f_3(x)y_0^3]], \quad (22.b)$$

$$p^2 : y_2 = E^{-1} [vE[f_1(x)y_1 + 2f_2(x)y_0y_1 + 3f_3(x)y_0^2y_1]], \quad (22.c)$$

$$p^3 : y_3 = E^{-1} [vE[f_1(x)y_2 + f_2(x)(y_1^2 + 2y_0y_1) + f_3(x)(3y_0^2y_2 + 3y_1^3y_0)]], \quad (22.d)$$

⋮

Setelah suku-suku $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ diperoleh, maka penyelesaian persamaan (14) ditentukan dengan menjumlahkan suku-suku tersebut dan mengambil $p = 1$ dalam bentuk (He, 1997):

$$y(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots$$

Simulasi Numerik

Pada bagian ini, metode homotopi pertubasi transformasi Elzaki diimplemntasikan pada dua persamaan diferensial Abelian. Selanjutnya, untuk melihat perilaku nilai hampiran yang dihasilkan, maka nilai-nilai hampiran tersebut diplot dalam bentuk grafik dengan menggunakan Maple 13.0.

Kasus 1. Pertimbangkan persaman Abelian jenis pertama berikut

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y + y^3, \quad y(0) = 0. \quad (23)$$

Penyelesaian persamaan (23) dilakukan dengan mengubah persamaan (23) ke transformasi Elzaki dalam bentuk :

$$E \left[\frac{dy}{dx} \right] = E [-1 + y - y^3]. \quad (24)$$

Gunakan sifat-sifat Transformasi Elzaki, maka kita peroleh

$$\frac{1}{v} E[y(x)] - vy(x) = E[-1 + y - y^3]. \quad (25)$$

Berdasarkan nilai awal $y(0) = 0$ dan dengan menggunakan invers transformasi Elzaki, maka Persamaan (25) menjadi

$$y(x) = x + E^{-1} [vE[-y + y^3]]. \quad (26)$$

Selanjutnya dengan menggunakan polinomial perturbasi,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x),$$

dan bentuk nonlinear

$$N(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(x),$$

dengan p adalah parameter pertubasi yang cukup kecil, maka Persamaan (26) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) = x + pE^{-1} \left[vE \left[-\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(x) \right] \right]. \quad (27)$$

Berdasarkan Persamaan (7), maka bentuk nonlinear $y^3(x)$ adalah berturut-turut

$$\begin{aligned} H_0(y_0) &= y_0^3, \\ H_0(y_0, y_1) &= 3y_0^2 y_1, \\ H_0(y_0, y_1, y_2) &= 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2, \\ H_0(y_0, \dots, y_3) &= 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sehingga dengan menggunakan perbandingan koefisien dari $p^0, p^1, p^2, p^3, \dots$ nilai-nilai penyelesaian hampiran Persamaan (27) diberikan oleh

$$p^0 : y_0(x) = x, \quad H_0(y) = x^3, \quad (28.a)$$

$$p^1 : y_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad H_1(y) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^6, \quad (28.b)$$

$$p^2 : y_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{20}x^5 + \frac{3}{28}x^7, \quad H_2(y) = \frac{5}{4}x^5 - \frac{9}{5}x^7 + \frac{57}{112}x^9, \quad (28.c)$$

$$p^3 : y_3(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{8}{30}x^6 - \frac{267}{1408}x^8 + \frac{57}{1120}x^{10}. \quad (28.d)$$

\vdots

Berdasarkan (12), maka penyelesaian eksak diperoleh dengan menjumlahkan nilai-nilai yang diperoleh dalam bentuk:

$$\begin{aligned} y(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{41}{120}x^5 + \frac{191}{720}x^6 - \frac{191}{5040}x^7 - \frac{393}{2240}x^8 \\ &\quad + \frac{1039}{4032}x^9 - \frac{6973}{33600}x^{10} - \frac{43}{8400}x^{11} + \dots \end{aligned}$$

Misalkan $\phi_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k(x)$ maka dengan menggunakan Persamaan (28.a)

– (28.d), dan beberapa suku berikutnya, diperoleh

$$\phi_0(x) = x,$$

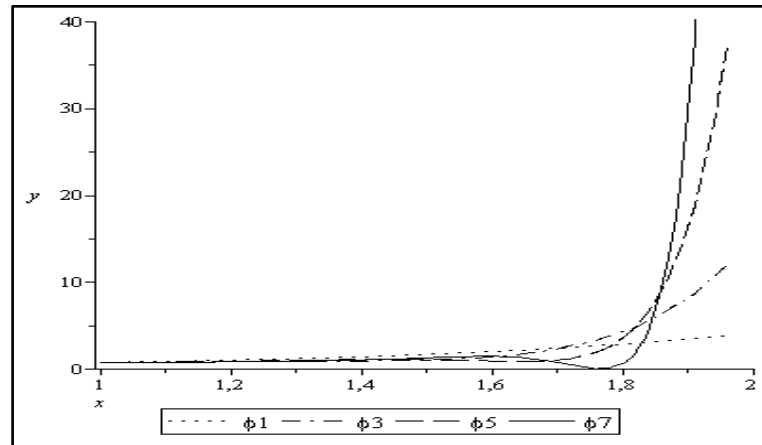
$$\phi_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

$$\phi_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{20}x^5 + \frac{3}{28}x^7,$$

$$\phi_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{7}{20}x^5 + \frac{4}{15}x^6 + \frac{3}{28}x^7 - \frac{267}{1120}x^8 + \frac{57}{1120}x^{10},$$

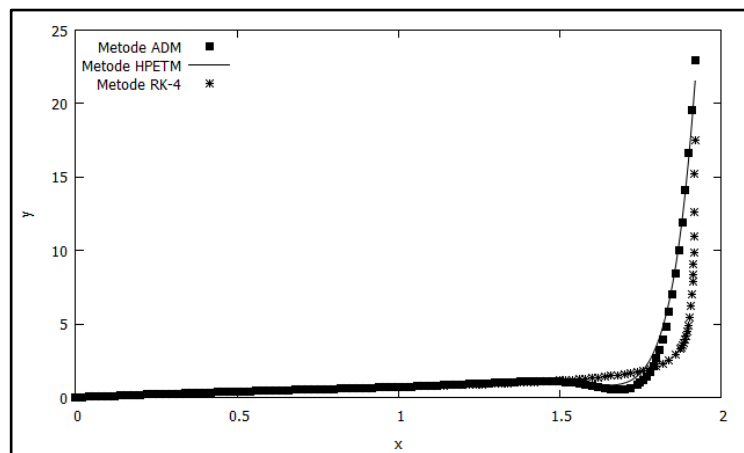
\vdots

Untuk mengetahui perilaku dari solusi hampiran ini, maka nilai-nilai $\phi_1(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ dan $\phi_7(x)$ di plot dalam bentuk grafik pada interval $1 \leq x \leq 2$ yang diberikan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Perbandingan kurva $\phi_1(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ dan $\phi_7(x)$ dari Persamaan (23) pada $1 \leq x \leq 2$.

Sedangkan untuk mengetahui performa, solusi hampiran masalah nilai awal (23) yang dihasilkan oleh metode transformasi Elzaki-perturbasi homotopi (metode HPETM) dibandingkan dengan metode dekomposisi Adomian (Jaradat, 2008) dan metode Runge-Kutta Orde Empat (RK-4) yang diberikan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Perbandingan solusi hampiran dari metode HMP-Elzaki, ADM dan Rung-Kutta 4 dari Persamaan (23) pada $0 \leq x \leq 2$.

Gambar 2 memperlihatkan solusi hampiran yang dihasilkan oleh Metode HP-Elzaki, ADM dan RK-4. Solusi hampiran dari ketiga metode tersebut mempunyai nilai yang sama pada interval $0 \leq x \leq 1,5$, sedangkan nilai solusi hampiran metode MTEPH dan ADM berhimpit pada interval $0 \leq x \leq 2$.

Kasus 2. Pertimbangkan persamaan Abelian jenis pertama berikut

$$\frac{dy}{dx} = 4 + 4xy + 2xy^2 + x^2y^3, \quad y(0) = 0. \quad (29)$$

Implementasi metode transformasi Elzaki pada persoalan nilai (29) memberikan bentuk

$$E\left[\frac{dy}{dx}\right] = E[-4 + 4xy + 2xy^2 + x^2y^3]. \quad (30)$$

Gunakan sifat-sifat linear transformasi Elzaki (Elzaki, 2011), maka Persamaan (30) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{1}{v}E[y(x)] - vy(x) = E[4 + 4xy + 2xy^2 + x^2y^3]. \quad (31)$$

Berdasarkan nilai awal $y(0) = 0$, maka

$$E[y(x)] = 4v^3 + vE[4xy + 2xy^2 + x^2y^3],$$

atau

$$y(x) = 4x + E^{-1}\left[vE[4xy + 2xy^2 + x^2y^3]\right]. \quad (32)$$

Selanjutnya dengan menggunakan polinomial perturbation

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x),$$

dan bentuk nonlinear

$$y^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{1,n}(x), \quad \text{dan} \quad y^3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{2,n}(x),$$

diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) = x + pE^{-1}\left[vE\left[4x \sum_{n=0}^{\infty} p^n y_n(x) + 2x \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{1,n}(x) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{2,n}(x)\right]\right]. \quad (33)$$

Berdasarkan polinomial yang diberikan pada Persamaan (7), bentuk nonlinear

$\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{1,n}(x)$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} p^n H_{2,n}(x)$ diberikan masing-masing dalam bentuk

$$\begin{aligned} H_{1,0}(y) &= y_0^2, \\ H_{1,1}(y) &= 2y_0y_1, \\ H_{1,2}(y) &= 2y_0y_2 + y_1^2, \\ H_{1,3}(y) &= 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} H_{2,0}(y) &= y_0^3, \\ H_{2,1}(y) &= 3y_0^2y_1, \\ H_{2,2}(y) &= 3y_0^2y_2 + 3y_0y_1^2, \\ H_{2,3}(y) &= 3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2 + y_1^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nilai-nilai y_0, y_1, y_2, \dots diperoleh dengan membandingkan koefisien dari $p^0, p^1, p^2, p^3, \dots$, sehingga dari (33) diperoleh

$$p^0 : y_0(x) = 4x,$$

$$\begin{aligned}
 p^1 : y_1(x) &= \frac{16}{3}x^3 + 8x^4 + \frac{64}{6}x^6, \\
 p^2 : y_2(x) &= \frac{64}{15}x^5 + \frac{352}{18}x^6 + \frac{128}{7}x^7 + \frac{896}{24}x^8 + \frac{116}{27}x^9 + \frac{512}{11}x^{11}, \\
 p^3 : y_3(x) &= \frac{128}{9}x^6 + \frac{2176}{105}x^7 + \frac{152}{9}x^8 + \frac{8704}{189}x^9 + \frac{6176}{75}x^{10} + \frac{65792}{297}x^{11} \\
 &\quad + \frac{10432}{63}x^{12} + \frac{110336}{429}x^{13} + \frac{23552}{63}x^{14} + \frac{7424}{33}x^{16}, \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

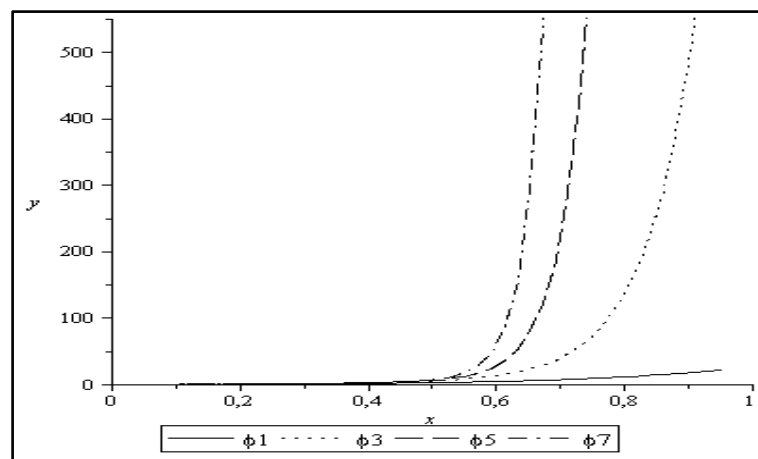
Setelah nilai suku-suku $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$ telah diketahui maka penyelesaian eksak dapat diperoleh dengan menjumlahkan nilai-nilai tersebut,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 4x + \frac{16}{3}x^3 + 8x^4 + \frac{64}{15}x^5 + \frac{400}{9}x^6 + \frac{4096}{105}x^7 + \frac{488}{9}x^8 + \frac{6784}{63}x^9 + \frac{6176}{75}x^{10} \\
 &\quad + \frac{79616}{297}x^{11} + \frac{10432}{63}x^{12} + \frac{110336}{429}x^{13} + \frac{23552}{63}x^{14} + \frac{7424}{33}x^{16} + \dots
 \end{aligned}$$

Misalkan $\phi_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k(x)$ maka dengan menggunakan $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$

diperoleh

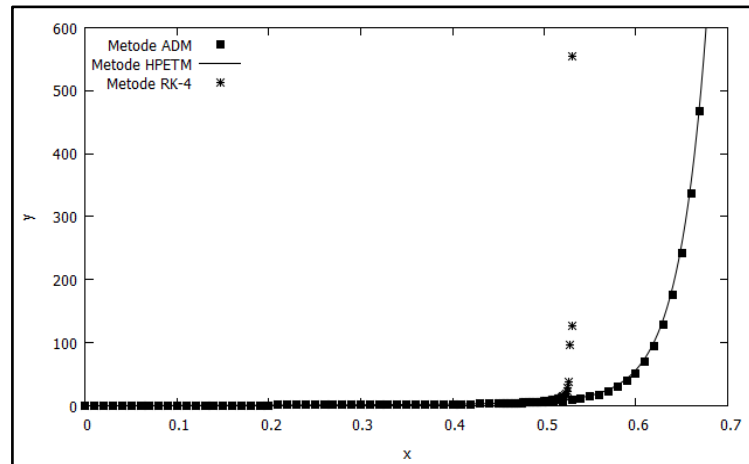
$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= 4x, \\
 \phi_1 &= 4x + \frac{16}{3}x^3 + 8x^4 + \frac{32}{3}x^6, \\
 \phi_2 &= 4x + \frac{16}{3}x^3 + 8x^4 + \frac{64}{15}x^5 + \frac{272}{9}x^6 + \frac{128}{7}x^7 + \frac{112}{3}x^8 + \frac{1664}{27}x^9 + \frac{512}{11}x^{11}, \\
 \phi_3 &= 4x + \frac{16}{3}x^3 + 8x^4 + \frac{64}{15}x^5 + \frac{400}{9}x^6 + \frac{4096}{105}x^7 + \frac{488}{9}x^8 + \frac{6784}{63}x^9 + \frac{6176}{75}x^{10} \\
 &\quad + \frac{79616}{297}x^{11} + \frac{10432}{63}x^{12} + \frac{110336}{429}x^{13} + \frac{23552}{63}x^{14} + \frac{7424}{33}x^{16}. \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$



Gambar 3. Perbandingan kurva $\phi_1(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_5(x)$ dan $\phi_7(x)$ dari Persamaan

(23) pada $0 \leq x \leq 1$.

Perbandingan solusi hampiran dari Persamaan (29) yang dihasilkan oleh metode HPTEM, metode ADM (Jaradat, 2008), dan RK4 diberikan pada Gambar 3.



Gambar 4. Perbandingan solusi hampiran metode HMP-Elzaki, ADM dan Rung-Kutta 4 dari Persamaan (29) dengan $0 \leq x \leq 0.7$.

Gambar 4 memperlihatkan solusi hampiran dari ketiga metode yang diplot pada interval $[0; 0,7]$. Solusi hampiran dari ketiga metode berhimpit pada interval $[0;0,5]$. Sebaliknya, metode HPETM dan ADM berhimpit sepanjang interval $[0; 0,7]$.

KESIMPULAN

Pada artikel, metode transformasi Elzaki homotopi perturbasi diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Abelian jenis pertama. Dua buah contoh persamaan diferensial diberikan untuk memvalidasi dan menguji performa metode tersebut. Hasil solusi hampiran memberikan gambaran bahwa metode transformasi Elzaki perturbasi homotopi dapat menyelesaikan masalah nilai awal yang diberikan pada Persamaan (23) dan (29). Selanjutnya Gambar 1 dan 2 juga menunjukkan bahwa penyelesaian yang diberikan membentuk pola grafik yang teratur. Selain itu, perbandingan solus hampiran dengan metode ADM dan RK-4 memberikan gambaran, bahwa solusi yang dihasilkan oleh metode HPTEM kompetitif terhadap metode RK4. Sedangkan terhadap metode ADM, solusi hampiran berhimpit sepanjang interval yang diberikan.

DAFTAR RUJUKAN

- Adomian, G. (1990). A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations. *Mathematical Computer and Modeling*, 13(7), 17–43.
- Aldilla, L., Jaharuddin, & Siswandi. (2012). Penggunaan metode perturbasi homotopi untuk menyelesaikan masalah aliran fluida sisko pada pipa lurus.

-
- Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, 11(1), 11–20.
- Bhadane, P. K. G., & Pradhan, V. H. (2013). Elzaki transform homotopy perturbation method for solving gas dynamics equation. *International Journal of Research in Engineering and Technology*, 2(12), 260–264.
- Braun, M. (1992). *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*. Springer. New York.
- Elzaki, T. M. (2011). The new integral transform " ELzaki transform ". *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(1), 57–64.
- Elzaki, T. M., & Biazar, J. (2013). Homotopy perturbation method and Elzaki transform for solving system of nonlinear partial differential equations. *World Applied Sciences Journal*, 24(7), 944–948. <https://doi.org/10.5829/idosi.wasj.2013.24.07.1041>
- Elzaki, T. M., & Hilal, E. M. A. (2012). Homotopy perturbation and Elzaki transform for solving nonlinear partial differential equations. *Mathematical Theory and Modeling*, 2(3), 33–42.
- Ghorbani, A. (2009). Beyond Adomian polynomials: He polynomials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 1486–1492. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.06.034>
- He, J. (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2(4), 230–235.
- He, J. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 257–262.
- Hesameddini, E., & Abdollahy, N. (2013). Homotopy perturbation and Elzaki transform for solving Sine-Gorden and Klein-Gorden equations. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 3(2), 33–46.
- Jang, M., Chen, C., & Liy, Y.-C. (2000). On solving the initial-value problems using the differential transformation method. *Applied Mathematics and Computation*, 115, 145–160.
- Jaradat, O. K. (2008). Adomian decomposition method for solving Abelian differential equations. *Journal of Applied Sciences*, 8(10), 1962–1966.
- Khatizah, E., Karima, P. T., & Astuti, D. I. (2015). Aplikasi metode transformasi diferensial pada sistem persamaan diferensial biasa. *Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, 14(2), 1–8.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, 147, 499–513. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00790-7](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00790-7)
- Minarti, N., Kiftiah, M., & Helmi. (2015). Penyelesaian persamaan diferensial parsial linear dengan menggunakan metode transformasi Elzaki. *Buletin Ilmiah Matematika Statistika Dan Terapannya*, 04(3), 227–236.
- Nayfeh, A. H. (1985). *Problems in Perturbation*. Wiley. New York.
- Polyanin, A. D., & Zaitsev, V. F. (1995). *Handbook of Solution for Ordinary Differential Equations*. CRC Press Inc. Boca Raton.
- Schiesser, W. R. (2014). *Differential Equation Analysis in Biomedical Science and Engineering: Ordinary Differential Equations Applications with R*. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.
- Singh, P., & Sharma, D. (2020). Comparative study of homotopy perturbation transformation with homotopy perturbation Elzaki transform method for

- solving nonlinear fractional. *Nonlinear Engineering*, 9, 60–71. <https://doi.org/10.1515/nleng-2018-0136>
- Suleman, M., Wu, Q., & Abbas, G. (2016). Approximate analytic solution of (2 + 1) dimensional coupled differential Burger's equation using Elzaki homotopy perturbation method. *Alexandria Engineering Journal*, 55, 1817–1826. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.03.041>
- Wartono, Hanafi, M., & Suryani, I. (2020). The solution of nonlinear parabolic equation using variational iteration method. *Jurnal Matematika Statistika Dan Komputasi*, 16(3), 287–295. <https://doi.org/10.20956/jmsk.v16i3.8468>
- Wartono, & Muda, Y. (2011). Aproksimasi metode dekomposisi adomian pada persamaan diferensial hiperbolik linear. *Jurnal Sains, Teknologi Dan Industri*, 9(1), 97–103. <https://doi.org/10.24014/sitekin.v9i1.612>
- Wartono, & Muhajir, M. N. (2013). Penyelesaian persamaan riccati dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Sains, Teknologi Dan Industri*, 10(2), 97–101. <https://doi.org/10.24014/sitekin.v11i1.562>
- Watugala, G. K. (1993). Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *International Journal Mathematics Education Sciences Technology*, 24(1), 35–43. <https://doi.org/10.1080/0020739930240105>
- Wazwaz, A., & Mehanna, M. S. (2010). The combined Laplace-Adomian method for handling singular integral equation of heat transfer. *International Journal of Nonlinear Science*, 10(2), 248–252.
- Wibowo, A. T., Jaharuddin, & Kusnanto, A. (2013). Penggunaan metode homotopi untuk menyelesaikan model aliran polutan di tiga danau yang saling terhubung. *Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, 12(1), 79–92.