



Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Ferris Wheel (Fw_n)

(Rainbow Connection Number Of Ferris Wheel Graph (Fw_n))

Narti Lakisa¹, Nurwan^{2*}, Salmun K. Nasib³, Nisky Imansyah Yahya⁴

^{1,2,4} Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo – Bone Bolango, Gorontalo, Indonesia

³ Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo – Bone Bolango, Gorontalo, Indonesia

* nurwan@ung.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini didefinisikan graf baru yang dinamakan graf ferris wheel yang dinotasikan dengan Fw_n . Graf ferris wheel dengan $2n + 1$ titik dan $5n$ sisi dihasilkan dengan menggabungkan dua buah graf yaitu graf lingkaran dan graf roda dengan menambahkan sisi sebanyak $2n$. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf ferris wheel dengan bilangan bulat positif $n \geq 3$ dengan langkah-langkah; menggambar graf ferris wheel, menentukan bilangan terhubung pelangi dan membuktikan teorema bilangan terhubung pelangi pada graf ferris wheel. Metode dalam penelitian ini adalah studi literatur. Hasilnya diperoleh bilangan terhubung pelangi pada graf ferris wheel yaitu $rc(Fw_3$ atau $Fw_4) = 2, rc(Fw_5$ atau $Fw_6) = 3, rc(Fw_7$ atau $Fw_8) = 4, rc(Fw_9$ atau $Fw_{10}) = 5$, dan $rc(Fw_n) = j + 6$ jika $n = 3j + 11, 3j + 12$, dan $3j + 13$ untuk $j \geq 0$

Kata kunci: Bilangan Terhubung Pelangi, Graf Ferris Wheel (Fw_n)

Abstract

In this research, a new graph is defined called ferris wheel graph which is denoted by Fw_n . Ferris wheel graph with $2n + 1$ vertices and $5n$ edges is generated by combining two graphs, circle graph and wheel graph by adding $2n$ edges. The purpose of this study was to determine the number of rainbow connected in a ferris wheel graph with some positive numbers $n \geq 3$ with the following steps, draw a ferris wheel graph, determine the rainbow vertex connection numbers and prove the theorem of rainbow vertex connection numbers on the ferris wheel graph. The method in this research was literature study. The results was found the rainbow vertex connection numbers on the ferris wheel graph as follows $rc(Fw_3$ or $Fw_4) = 2, rc(Fw_5$ or $Fw_6) = 3, rc(Fw_7$ or $Fw_8) = 4, rc(Fw_9$ or $Fw_{10}) = 5$ and $rc(Fw_n) = j + 6$ if $n = 3j + 11, 3j + 12$, and $3j + 13$ for $j \geq 0$

Keywords: Rainbow Vertex-Connection Numbers, Ferris Wheel Graph (Fw_n)

Cara mengutip: Lakisa, N., Nurwan, N., Nasib, K.,S., & Yahya, N,I. (2022). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Ferris Wheel (Fw_n). *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 7(1), 24-40. <https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v7i1.2337>

PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan sebuah topik bahasan yang saat ini telah banyak dikembangkan sehingga banyak memiliki penerapan bagi masyarakat. Teori ini diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh matematikawan asal Swiss yaitu ketika memecahkan permasalahan mengenai Jembatan Konigsberg (Lihawa et al., 2022). Salah satu bahasan teori graf yaitu tentang pelabelan graf yang dibagi atas tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total (Ummah, 2013). Pelabelan terus mengalami perkembangan, salah satunya tentang pewarnaan graf.

Pewarnaan Graf merupakan penambahan warna pada elemen sebuah Graf itu sendiri (Taha et al., 2021). Selanjutnya Pewarnaan graf membuat cabang ilmu teori graf semakin berkembang dan menemukan topik baru yaitu pewarnaan pelangi (Krivelevich, M. dan Yuster, 2014). Pewarnaan pelangi adalah jika lintasan pelangi ada disetiap antara dua titik sehingga tidak ada dua sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. (Medika, 2012) melakukan penelitian tentang *rainbow connection* pada beberapa graf.

Misalkan graf G adalah graf terhubung tak trivial dan k adalah sebuah bilangan bulat positif, didefinisikan pewarnaan sisi: $E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$. Jika warna yang digunakan sebanyak k warna maka pewarnaannya disebut pewarnaan- k pelangi. Bilangan k disebut bilangan terhubung pelangi graf G , dinotasikan $rc(G)$ yang didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi graf G sehingga graf tersebut terhubung pelangi pada graf berukuran m yang memiliki diameter $diam(G)$ dengan hubungan yaitu $diam(G) \leq rc(G) \leq m$.

Topik tentang bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf sangat menarik untuk dikaji seperti yang dilakukan oleh Kumala (2019) yang meneliti tentang bilangan terhubung pelangi graf bunga (W_m, K_n) dan graf lemon (Le_n). Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh (Akadji et al., 2021) menentukan bilangan terhubung pelangi kuat pada graf slinky ($Sl_n C_4$). Sementara (Lihawa et al., 2022) dan (Ismail et al., 2022) meneliti tentang bilangan terhubung pelangi dari hasil operasi dua buah graf.

Berdasarkan hal diatas, peneliti tertarik untuk meneliti penggabungan antara graf lingkaran dan roda karena belum ada penelitian tentang gabungan antara dua graf tersebut. Penggabungan antara graf roda dan graf lingkaran dibentuk dengan melakukan penambahan sisi sebanyak $2n$ sehingga terbentuk satu graf baru. Graf tersebut menyerupai kerangka dari *ferris wheel* maka graf tersebut dinamakan graf *ferris wheel*. Terkait hal tersebut, penulis akan membahas tentang menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf *ferris wheel* yang dinotasikan Fw_n dengan bilangan bulat positif $n \geq 3$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan mengkaji jurnal penelitian terbaru mengenai graf terhubung pelangi yang sudah dilakukan. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf sederhana, terbatas, dan berhingga. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menggambar graf *ferris wheel*, mencari pola $rc(Fw_n)$ dan membuktikan teorema dari $rc(Fw_n)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

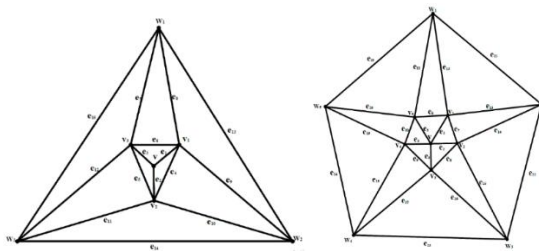
Definisi 1. Graf *ferris wheel* merupakan penggabungan antara dua buah graf yakni graf lingkaran dan graf roda dengan $v \cup v_i \in V(W_n), i = 1, 2, \dots, n$ dan $w_i \in V(C_n), i = 1, 2, \dots, n$, dengan menambahkan sisi yang menghubungkan titik w_i pada graf lingkaran ke titik v_i dan titik v_{i-1} dengan $i = 1, 2, \dots, n$ pada graf roda sebanyak $2n$ sisi dengan bilangan bulat positif $n \geq 3$.

Misalkan $i \in [1, n]$ dengan kondisi $n + 1 = 1$, maka graf *ferris wheel* Fw_n dibentuk oleh himpunan titik dan sisi yang berturut-turut didefinisikan oleh:

$$V(Fw_n) = \{v\} \cup \{v_i\} \cup \{w_i\}$$

$$E(Fw_n) = \{vv_i\} \cup \{v_i v_{i+1}\} \cup \{v_i w_i\} \cup \{v_i w_{i+1}\} \cup \{w_i w_{i+1}\}.$$

Lebih jelasnya konstruksi dari graf *ferris wheel* dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Fw_3 dan Fw_5

Bilangan Terhubung Pelangi Graf Ferris Wheel (Fw_n)

Teorema 1. Misalkan G adalah graf *ferris wheel* Fw_n dengan $2n + 1$ titik dan $5n$ sisi, n merupakan bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$. Bilangan terhubung pelangi pada Fw_n adalah :

$$rc(Fw_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 3 & \text{atau } n = 4 \\ 3, & \text{untuk } n = 5 & \text{atau } n = 6 \\ 4, & \text{untuk } n = 7 & \text{atau } n = 8 \\ 5, & \text{untuk } n = 9 & \text{atau } n = 10 \\ j + 6, & \text{untuk } j \geq 0 & \text{jika } n = \{3j + 11, 3j + 12, 3j + 13\} \end{cases}$$

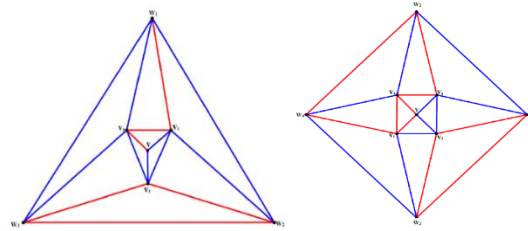
Bukti: Untuk membuktikan Teorema 1, cukup diperlihatkan $rc(Fw_n) \geq diam(Fw_n)$. Sehingga untuk pembuktian teorema tersebut dibagi dalam 9 kasus sebagai berikut:

Kasus 1. Untuk $n = 3$ atau $n = 4$.

Karena $diam(Fw_n) = 2$ untuk $n = 3$ dan $n = 4$, maka $rc(Fw_n) \geq 2$. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ dengan kondisi $n + 1 = 1$ dan $1 - 1 = n$ sebagai berikut :

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_i w_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ & \text{atau } e = w_i v_i & \text{dan } i \in [3, 4] \\ 2, & \text{jika } e = w_i w_{i+1} & \text{dan } i \text{ genjil} \\ & \text{atau } e = w_i v_i & \text{dan } i \in [1, 2] \\ \lfloor \frac{i}{2} \rfloor, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \in [1, n] \\ & \text{atau } e = w_i v_{i-1} & \text{dan } i \in [1, n] \\ & \text{atau } e = vv_i & \text{dan } i \in [1, n] \end{cases}$$

Pewarnaan pelangi pada graf *ferris wheel* Fw_3 dan Fw_4 secara berturut-turut ditampilkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi Fw_3 dan Fw_4

Lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Lintasan Pelangi $n = 3$ atau $n = 4$

| Kasus | x | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-----------|-----------|-------------------------------|-------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n], v_{i+1} = v_1$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, 2], n = 4$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, 2], n = 4$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n], n = 4$ | v_i, v, v_{i+2} |
| 6 | v_{n-1} | w_1 | $n = 4$ | v_{n-1}, v_n, w_1 |
| 7 | v_n | w_2 | $n = 4$ | v_n, v_1, w_2 |

Kasus 2. Untuk $n = 5$ atau $n = 6$.

Karena $diam(Fw_n) = 3$ untuk $n = 5$ dan $n = 6$, maka $rc(Fw_n) \geq 3$. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut :

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_i v_i \text{ dan } i \in [1, n] \\ & \text{atau } e = w_i v_{i-1} \text{ dan } i \in [1, n], v_0 = v_n \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} \text{ dan } i \text{ ganjil}, v_{n+1} = v_1 \\ 3, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} \text{ dan } i \text{ genap}, v_{n+1} = v_1 \\ k, & \text{jika } e = w_i w_{i+1} \text{ untuk } i \in \{k, k + 3\} \\ & \text{dan } 1 \leq k \leq 3, w_{n+1} = w_1 \\ k + 2, & \text{jika } e = v v_i \text{ untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } k = [0, 1] \end{cases}$$

Lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 2.

Kasus 3. $n = 7$

Karena $n = 7$ memiliki $diam(Fw_7) = 3$, maka $rc(Fw_7) \geq 3$. Akan ditunjukkan $rc(Fw_7) \geq 4$. Diasumsikan $rc(Fw_7) \leq 3$, maka terdapat pewarnaan-3 pada graf *ferris wheel* (Fw_7) dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan : $c^*(w_i w_{i+1}) = i, i \in [1, 3]$

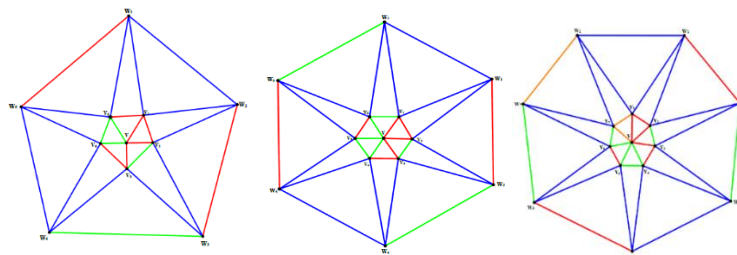
Tabel 2. Lintasan Pelangi $n = 5$ atau $n = 6$

| Kasus | X | y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---------------------------|----------------------------------|
| 1 | v_n | v_2 | | w_n, v_i, v |
| 2 | w_n | v_2 | | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | v_i | w_{i+3} | $i \in [1, 3]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, 2]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n - 1]$ | w_i, v_i, v |
| 9 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n - 1]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 10 | v_i | w_{i+3} | $i \in [1, 3], n = 6$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 11 | w_i | v_{i+3} | $i \in [1, 3], n = 6$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 12 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n - 3], n = 6$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |

Perhatikan sisi w_4w_5 hanya dapat diwarnai dengan 1, sisi w_5w_6 hanya dapat diwarnai dengan 2 dan sisi w_6w_7 hanya dapat diwarnai dengan 3, andaikan diberi warna selain warna tersebut, maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Selanjutnya sisi w_6w_7 tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* Fw_7 bukan merupakan pewarnaan-3 pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Fw_7) \leq 4$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ sebagai berikut :

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_i v_i & \text{dan } i \in [1, n] \\ & \text{atau } e = w_i v_{i-1} & \text{dan } i \in [1, n], v_0 = v_7 \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil, } i \neq n \\ 3, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \\ 4, & \text{jika } e = w_7 w_1 & \text{dan } i \text{ genap} \\ & \text{atau } e = v_7 v_1 & \\ k, & \text{jika } e = w_i w_{i+1} & \text{untuk } i \in \{k, k + 3\} \\ & \text{dan } 1 \leq k \leq 3 & \\ k + 2, & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } k = [0, 1] & \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 3. Pewarnaan pelangi pada graf *ferris wheel* Fw_5, Fw_6 , dan Fw_7 secara berturut-turut ditampilkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Pewarnaan Pelangi Fw_5, Fw_6 , dan Fw_7

Tabel 3. Lintasan Pelangi $n = 7$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $w_{i+k} \leq w_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |

Kasus 4. $n = 8$

Karena $\text{diam}(Fw_n) = 4$ untuk $n = 8$, maka $rc(Fw_n) \geq 4$. Selanjutnya didefinisikan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ sebagai berikut :

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_i v_i & \text{dan } i \in [1, n] \\ & \text{atau } e = w_i v_{i-1} & \text{dan } i \in [1, n], v_0 = v_8 \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap, } v_{n+1} = v_1 \\ k, & \text{jika } e = w_i w_{i+1} & \text{untuk } i \in \{k, k + 4\} \\ & \text{dan } 1 \leq k \leq 4, w_{n+1} = w_1 \\ k + 2, & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf ferris wheel (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Lintasan Pelangi $n = 8$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Kasus 5. Untuk $n = 9$

Untuk $n = 9$ memiliki $diam(Fw_n) = 4$, maka $rc(Fw_n) \geq 4$. Akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \geq 5$. Diasumsikan $rc(Fw_n) \leq 4$, maka terdapat pewarnaan-4 pada graf *ferris wheel* dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan:

$$(c^*(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k+1 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n - 1]$ dan $w_n v_n$ tidak dapat diwarnai 1, 2 atau 3. Andaikan diwarnai dengan warna tersebut, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}$ dan $0 \leq k \leq 2$ tidak dapat diwarnai dengan $k + 1$, sehingga dimisalkan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ diwarnai dengan warna 4. Selanjutnya, perhatikan sisi $w_1 v_9$ hanya dapat diwarnai dengan warna 1. Andaikan diwarnai selain warna 1, maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_2 v_1$ hanya dapat diwarnai dengan 3 dan sisi $w_7 v_6$ hanya dapat diwarnai dengan warna 3 atau 4, apabila diwarnai dengan selain warna 3 maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_3 v_2$ tidak dapat diwarnai dengan 1,3 atau 4, sehingga sisi tersebut diwarnai dengan warna 2. Selanjutnya perhatikan sisi $w_8 v_7$ hanya dapat diwarnai dengan 1, apabila diwarnai dengan warna selain 1, maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_9 v_8$ hanya dapat diwarnai dengan 2 dan sisi $w_4 v_3$ hanya dapat diwarnai dengan 4. Selanjutnya perhatikan sisi $w_5 v_4$ tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_9) bukan merupakan pewarnaan-4 pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Fw_9) \leq 5$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sebagai berikut:

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_{3i+1} w_{3i+2} & \text{dan } 0 \leq i \leq 2 \\ & \text{atau } e = v_i w_i & \text{dan } i \in [1, n] \\ 2, & \text{jika } e = w_{3i+2} w_{3i+3} & \text{dan } 0 \leq i \leq 2 \\ & \text{atau } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } e = w_{3i+3} w_{3i+4} & \text{dan } 0 \leq i \leq 2, w_{10} = w_1 \\ & \text{atau } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ 4, & \text{jika } e = v_9 v_1 & \text{atau } w_9 w_1 \\ 5, & \text{jika } e = v_i w_{i+1} & \text{dan } i \in [1, n], w_{10} = w_1 \\ k+2 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Lintasan Pelangi $n = 9$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Kasus 6. Untuk $n = 10$

Untuk $n = 10$ memiliki $\text{diam}(Fw_n) = 4$, maka $\text{rc}(Fw_n) \geq 4$. Akan ditunjukkan $\text{rc}(Fw_n) \geq 5$. Diasumsikan $\text{rc}(Fw_n) \leq 4$, maka terdapat pewarnaan-4 pada graf *ferris wheel* dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan:

$$(c^*(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k+1 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ tidak dapat diwarnai 1 atau 2 dan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\}$ dan $0 \leq k \leq 2$ tidak dapat diwarnai dengan $k+1$, Andaikan diwarnai dengan warna tersebut, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{1,2,8,9\}$ hanya dapat diwarnai dengan 4 dan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [3,7]$ hanya dapat diwarnai dengan 3. Selanjutnya perhatikan sisi $w_{10} v_{10}$ tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_{10}) bukan merupakan pewarnaan-4 pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\text{rc}(Fw_{10}) \leq 5$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sebagai berikut:

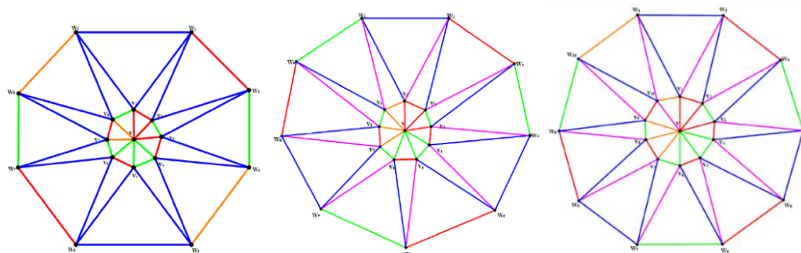
$$(c(e)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{jika } e = w_{3i+1}w_{3i+2} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq 2 \\ & \text{atau } e = v_iw_i \quad \text{dan } i \in [1, n] \\ 2, & \text{jika } e = w_{3i+2}w_{3i+3} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq 2 \\ & \text{atau } e = v_iv_{i+1} \quad \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } e = w_{3i+3}w_{3i+4} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq 2, w_{10} = w_1 \\ & \text{atau } e = v_iv_{i+1} \quad \text{dan } i \text{ genap} \\ 4, & \text{jika } e = v_{10}v_1 \quad \text{atau } e = w_{10}w_1 \\ 5, & \text{jika } e = v_iv_{i+1} \quad \text{dan } i \in [1, n], w_{11} = w_1 \\ k+2 & \text{jika } e = vv_i \quad \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq 2 \end{array} \right.$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Lintasan Pelangi $n = 10$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|--|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3], v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3], v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3], v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3], v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Pewarnaan pelangi pada graf *ferris wheel* Fw_8, Fw_9 , dan Fw_{10} secara berturut-turut ditampilkan pada Gambar 4.



Gambar 4. Pewarnaan Pelangi Fw_8, Fw_9 dan Fw_{10}

Kasus 7. Untuk $n = 3j + 11$, jika $j \geq 0$

Untuk $n = 3j + 11$, jika $j \geq 0$ memiliki $diam(Fw_n) = 4$, maka $rc(Fw_n) \geq 4$. Akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \geq j + 6$. Diasumsikan $rc(Fw_n) \leq j + 5$, maka terdapat pewarnaan- $j + 5$ pada graf *ferris wheel* dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, j + 5\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan:

$$(c^*(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k + 1 & \text{jika } e = v_i v_j & \text{untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \end{cases}$$

Perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ tidak dapat diwarnai 1 atau 2 dan $w_n v_n$ untuk n ganjil tidak dapat diwarnai dengan 1 dan 3, apabila diwarnai dengan warna tersebut maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}$ dan $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1$ tidak dapat diwarnai dengan $k + 1$ dan sisi $w_i v_i$ untuk $i = 1 \wedge i = n - 2$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 4$ atau $j + 5$. Selanjutnya perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [2, n - 3]$ tidak dapat diberi warna $3, 4, \dots, j + 4$, sehingga sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [3, n - 3]$ dan sisi $w_i v_i$ untuk $i = n \wedge i = n - 1$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 5$. Kemudian perhatikan sisi $w_1 v_n$ tidak dapat diwarnai dengan warna 1 untuk n genap dan tidak dapat diwarnai dengan 2 untuk n ganjil dan sisi $w_2 v_1$ tidak dapat diwarnai dengan warna 1 untuk n ganjil dan tidak dapat diwarnai dengan 2 untuk n genap, apabila diwarnai dengan warna tersebut maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_{i-1}$ untuk $i \in [3, n]$ tidak dapat diwarnai dengan 1 untuk i ganjil dan tidak dapat diwarnai dengan 2 untuk i genap. selanjutnya perhatikan sisi $w_1 v_n$ hanya dapat diwarnai dengan 1 atau $3, 4, \dots, j + 5$ untuk n ganjil dan dapat diwarnai dengan $2, 3, \dots, j + 5$ untuk n genap, sehingga dimisalkan sisi $w_1 v_n$ diwarnai dengan 1 untuk n ganjil dan diwarnai dengan 2 untuk n genap. Kemudian perhatikan sisi $w_2 v_1$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 4$ dan sisi $w_3 v_2$ hanya dapat diwarnai dengan 2. Oleh karena itu, sisi $w_4 v_3$ tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_n) bukan merupakan pewarnaan- $j + 5$ pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \leq j + 6$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, j + 6\}$ sebagai berikut:

$$(c(e)) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \text{jika } e = w_{3i+1}w_{3i+2} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \\ \quad \text{atau } e = v_i w_i \quad \text{dan } i \in [1, n] \\ 2, \quad \text{jika } e = w_{3i+2}w_{3i+3} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \\ \quad \text{atau } e = v_i v_{i+1} \quad \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, \quad \text{jika } e = w_{3i+3}w_{3i+4} \quad \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \\ \quad \text{atau } e = v_i v_{i+1} \quad \text{dan } i \text{ genap} \\ 4, \quad \text{jika } e = w_{n-1}w_n \quad \text{atau } e = v_n v_1 \\ 5, \quad \text{jika } e = w_n w_1 \\ k+2 \quad \text{jika } e = v v_i \quad \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ \quad \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2, \text{ jika } v_i w_{i+1} \quad \text{dani } \in [i, n], w_{n+1} = w_1 \end{array} \right.$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7. Lintasan Pelangi $n = 3j + 11$ untuk $j \geq 0$

| Kasus | x | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n-3], k \in [3, n-3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Kasus 8. Untuk $n = 3j + 12$, jika $j \geq 0$

Untuk $n = 3j + 12$, jika $j \geq 0$ memiliki $diam(Fw_n) = 4$, maka $rc(Fw_n) \geq 4$. Akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \geq j + 6$. Diasumsikan $rc(Fw_n) \leq j + 5$, maka terdapat pewarnaan- $j + 5$ pada graf *ferris wheel* dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, j + 5\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan:

$$(c^*(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k + 1 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \end{cases}$$

Perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ dan $w_n v_n$ tidak dapat diwarnai 1 atau 2 dan sisi $w_n v_n$ untuk n ganjil tidak dapat diwarnai 1, 2 atau 3, andaikan diwarnai dengan warna tersebut, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3$ dan $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} - 1 \right\rfloor$ tidak dapat diwarnai dengan $k + 1$, sehingga dimisalkan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ diwarnai dengan warna $j + 5$. Selanjutnya, perhatikan sisi $w_1 v_n$ untuk n genap tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_n) untuk n genap bukan merupakan pewarnaan- $j + 5$ pelangi.

Kemudian untuk n genap perhatikan sisi $w_1 v_n$ hanya dapat diwarnai dengan warna 1, sisi $w_2 v_1$ dan $w_{n-2} v_{n-3}$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 4$. Selanjutnya perhatikan sisi $w_3 v_2$ tidak dapat diwarnai dengan warna 2, sehingga sisi tersebut diwarnai dengan warna 2. Selanjutnya perhatikan sisi $w_{n-1} v_{n-2}$ hanya dapat diwarnai dengan 1, apabila diwarnai dengan warna selain 1, maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_n v_{n-1}$ tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_{3j+12}) untuk $j \geq 0$ bukan merupakan pewarnaan- $j + 5$ pelangi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \leq j + 6$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, j + 6\}$ sebagai berikut:

$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_{3i+1} w_{3i+2} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_i w_i & \text{dan } i \in [1, n] \\ 2, & \text{jika } e = w_{3i+2} w_{3i+3} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } e = w_{3i+3} w_{3i+4} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ 4, & \text{jika } e = w_{n-1} w_n & \text{atau } e = v_n v_1 \\ 5, & \text{jika } e = w_n w_1 & \\ k + 2 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2, & \text{jika } v_i w_{i+1} & \text{dan } i \in [i, n], w_{n+1} = w_1 \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Lintasan Pelangi $n = 3j + 12$ untuk $j \geq 0$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Kasus 9 Untuk $n = 3j + 13$, jika $j \geq 0$

Untuk $n = 3j + 13$, jika $j \geq 0$ memiliki $diam(Fw_n) = 4$, maka $rc(Fw_n) \geq 4$. Akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \geq j + 6$. Diasumsikan $rc(Fw_n) \leq j + 5$, maka terdapat pewarnaan- $j + 5$ pada graf *ferris wheel* dengan definisi warna $c^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, j + 5\}$. Tanpa mengurangi perumuman, dimisalkan:

$$(c^*(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k+1 & \text{jika } e = v v_i & \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \end{cases}$$

Perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [1, n]$ tidak dapat diwarnai 1 atau 2 dan sisi $w_n v_n$ untuk n ganjil tidak dapat diwarnai dengan 1, 2, atau 3. Selanjutnya perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3$ dan $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ tidak dapat diwarnai dengan $k + 1$, andaikan diwarnai dengan warna tersebut, maka akan terdapat lintasan tidak pelangi. Kemudian perhatikan sisi $w_i v_i$ untuk $i \in (1, 2, n - 2, n - 1)$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 5$, sisi $w_i v_i$ untuk $i \in [3, n - 3]$ dan sisi $w_i v_{i-1}$ untuk $i \in [4, n - 3]$ hanya dapat diwarnai dengan $j + 4$. Selanjutnya perhatikan sisi $w_n v_n$ hanya dapat diwarnai dengan 2, 3, ..., $j + 3$ untuk n ganjil dan hanya dapat diwarnai dengan 3, 4, ..., $j + 3$ untuk n genap, sehingga sisi $w_n v_n$ diberi warna 2 untuk n ganjil dan warna 3 untuk n genap. Selanjutnya perhatikan sisi $w_n v_{n-1}$ tidak dapat diwarnai dengan pewarnaan c^* , maka graf *ferris wheel* (Fw_{3j+13}) untuk $j \geq 0$ bukan merupakan pewarnaan- $j + 5$ pelangi. Selanjutnya,

akan ditunjukkan $rc(Fw_n) \leq j + 6$ dengan pendefinisian warna $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, j + 6\}$ sebagai berikut :

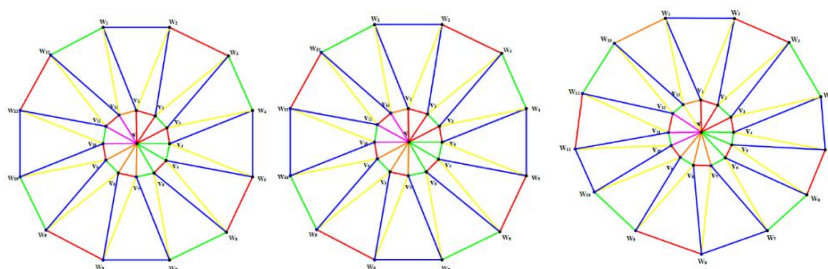
$$(c(e)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = w_{3i+1}w_{3i+2} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_iw_i & \text{dan } i \in [1, n] \\ 2, & \text{jika } e = w_{3i+2}w_{3i+3} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_iv_{i+1} & \text{dan } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{jika } e = w_{3i+3}w_{3i+4} & \text{dan } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 \\ & \text{atau } e = v_iv_{i+1} & \text{dan } i \text{ genap} \\ k+2 & \text{jika } e = w_{n-i}w_n & \text{atau } e = v_nv_i \\ & \text{jika } e = v_iv_j & \text{untuk } i \in \{3k+1, 3k+2, 3k+3\} \\ & \text{dan } 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2, & \text{jika } v_iw_{i+1} & \text{dan } i \in [i, n], w_{n+1} = w_1 \end{cases}$$

Selanjutnya lintasan pelangi untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ dengan pewarnaan c pada graf *ferris wheel* (Fw_n) dapat dilihat pada Tabel 9.

Tabel 9. Lintasan Pelangi $n = 3j + 13$ untuk $j \geq 0$

| Kasus | X | Y | Kondisi | Lintasan Pelangi |
|-------|-------|-----------|---|-----------------------------------|
| 1 | w_i | v | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v |
| 2 | w_i | v_{i+1} | $i \in [1, n]$ | w_i, v_i, v_{i+1} |
| 3 | v_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, v_{i+2} |
| 4 | v_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | v_i, v_{i+1}, w_{i+2} |
| 5 | w_i | w_{i+2} | $i \in [1, n]$ | w_i, w_{i+1}, w_{i+2} |
| 6 | w_i | v_{i+2} | $i \in [1, n]$ | $w_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ |
| 7 | w_i | w_{i+3} | $i \in [1, n]$ | $w_i, w_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}$ |
| 8 | v_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k} |
| 9 | w_i | v_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | w_i, v_i, v, v_{i+k} |
| 10 | v_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | v_i, v, v_{i+k}, w_{i+k} |
| 11 | w_i | w_{i+k} | $i \in [1, n - 3], k \in [3, n - 3],$ $v_{i+k} \leq v_n$ | $w_i, v_i, v, v_{i+k-1}, w_{i+k}$ |

Sebagai ilustrasi pewarnaan pelangi pada graf *ferris wheel* Fw_{11} , Fw_{12} , dan Fw_{13} secara berturut-turut ditampilkan pada Gambar 5.

**Gambar 5. Pewarnaan Pelangi Fw_{11} , Fw_{12} , dan Fw_{13}**

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bilangan terhubung pelangi pada graf *ferris wheel* yaitu $rc(Fw_3$ atau $Fw_4) = 2$, $rc(Fw_5$ atau $Fw_6) = 3$, $rc(Fw_7$ atau $Fw_8) = 4$, $rc(Fw_9$ atau $Fw_{10}) = 5$ dan $rc(Fw_n) = j + 6$ jika $n = 3j + 11, 3j + 12, 3j + 13$ untuk $j \geq 0$. Pembuktian teorema yang berkaitan dengan bilangan terhubung pelangi pada graf *ferris wheel* dibagi dalam sembilan kasus. Pada penelitian selanjutnya dapat diteliti untuk pewarnaan titik dan atau pewarnaan sisi kuat untuk graf *ferris wheel*.

DAFTAR RUJUKAN

- Akadji, A. F., Katili, M. R., Nasib, S. K., & Yahya, Ni. I. (2021). Rainbow vertex connection number and strong rainbow vertex connection number on slinky graph ($Sl_n C_4$). *Desimal: Jurnal Matematika*, 4(2), 123–132. <https://doi.org/10.24042/djm.v4i2.7276>
- Ismail, S., Hasan, I. K., Sigar, T., & Nasib, S. K. (2022). Rainbow Connection Number and Total Rainbow Connection Number of Amalgamation Results Diamond Graph ($([Br]_4)$) and Fan Graph (F_3). *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(1), 023–030. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss1pp023-030>
- Krivelevich, M. dan Yuster, R. (2014). The rainbow connection of graph in (at most) reciprocal to its minimum degree. *J. Graph Theory*, 174, 92–101.
- Kumala, I. S. (2019). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf lemon. *Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 4(1), 39–48.
- Lihawa, I., Ismail, S., Hasan, I. K., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2022). Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Prisma ($P_{(m,2)}$) dan Graf Lintasan (P_3). *Jambura Journal of Mathematics*, 4(1), 145–151. <https://doi.org/10.34312/jjom.v4i1.11826>
- Medika, G. H. (2012). Rainbow Connection pada Beberapa Graf. *Matematika UNAND*, 2(1), 17–25.
- Taha, D., Nurwan, N., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2021). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Graf Bunga (W_{m,K_n}) dan Graf Oleander ($(Or)_n$). *UNNES Journal of Mathematics*, 10(1), 8–13. <https://doi.org/https://doi.org/10.15294/ujm.v10i1.41247>
- Ummah, W. (2013). *Pelabelan Graf.*, Institut Teknologi Sepuluh November.