

Profil Distribusi Panas Menggunakan Skema Beda Hingga dengan Pengaruh Variasi Nilai Sumbu Mayor

(Heat Distribution Profile Using Finite Difference Schemes with Variation of The Major Axis Value Effects)

Annisa Dwi Sulistyningtyas^{1*}, Restu Ria Wantika²

^{1,2} Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas PGRI Adi Buana Surabaya – Jl. Dukuh Menanggal XII/4 Surabaya, Jawa Timur, Indonesia

*annisadwistiyas@unipasby.ac.id

Abstrak

Fluida merupakan salah satu topik penelitian di bidang matematika terapan yang banyak digunakan khususnya dalam proses industri. Pada industri minyak lepas pantai, dibutuhkan peran matematika dalam perhitungan distribusi fluida pada permukaan alat yang bekerja untuk dikembangkan lebih lanjut pada bidang teknologinya. Dalam penelitian ini, distribusi panas yang mengalir pada permukaan benda dipengaruhi oleh variasi nilai sumbu mayor. Nilai distribusi fluida disimulasikan ke dalam bentuk profil distribusi panas yang didapatkan dari model matematika dan diselesaikan secara numerik dengan Skema Beda Hingga. Semakin besar nilai sumbu mayor yang diberikan, maka distribusi panas yang dihasilkan semakin kecil. Hal tersebut disebabkan, distribusi panas pada permukaan benda dipengaruhi oleh besarnya luas penampang benda.

Kata kunci: *Distribusi panas, Skema Beda Hingga*

Abstract

Fluid is one of the research topics in mathematics applied used especially in industrial processes. In the oil mining industry, a mathematical role is needed in calculating the fluid distribution on the surface of tools that work to be developed in the technology. In this study, the heat distribution flow on the surface of the object is effected by the value of the major axis. The value of the fluid distribution is simulated in the form of heat distribution profile which is obtained from the mathematical model and then solved numerically by Finite Difference Scheme. The greater value of the major axis given, the smaller the heat distribution produced. It is caused of effected by the size of the large area of the object.

Keywords: *Heat distribution, Finite Difference Schemes*

Cara mengutip dengan APA 6 style: Sulistyningtyas, A.D. & Wantika, R.R. (2022). Profil Distribusi Panas Menggunakan Skema Beda Hingga dengan Pengaruh Variasi Nilai Sumbu Mayor. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 7(2), 108-116. <https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v7i2.2923>.

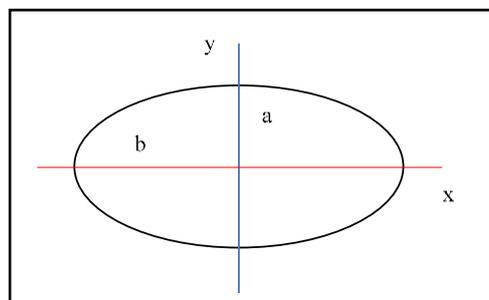
PENDAHULUAN

Fluida merupakan salah satu topik menarik yang dapat digunakan sebagai bahan penelitian di bidang matematika terapan yang dapat dikembangkan lebih lanjut untuk bidang teknologinya. fluida digunakan sebagai pengangkut panas, seperti dalam proses pemanasan dan pendinginan pada sistem transportasi dan proses industri (Mohd Sohut et al., 2022). Selain itu, penelitian tentang perpindahan panas fluida berguna dalam berbagai aplikasi teknik, seperti sebagai pendinginan transpirasi, pengurangan *drag*, bantalan dorong, dan *diffuser radial*. Studi aliran dan perpindahan panas sangat penting karena digunakan sebagai acuan penentuan efektivitas bahan dasar yang digunakan berdasarkan besarnya luas permukaan benda yang dialiri fluida.

Studi kasus yang digunakan dalam penelitian ini berupa distribusi panas dari perpindahan aliran fluida dengan karakteristik kental dan elastis. Jenis fluida yang digunakan adalah fluida viskoelastik yang merupakan salah satu jenis fluida non-Newtonian. Fluida non-Newtonian terdapat hampir di seluruh bidang aplikasi fluida, di antaranya adalah di bidanag industri dan biomedik. Hal tersebut disebabkan karena viskositas dari fluida non-Newtonian proporsional terhadap gaya geser (Haslinda Kusumaningsih et al., 2019).

Penelitian tentang perpindahan panas oleh fluida viskoelastik sebelumnya sudah dilakukan. Penelitian tersebut, dijelaskan bahwa aliran fluida non-Newtonian dengan jenis fluida viskoelastik mengalir melalui permukaan silinder sirkular (Mahat et al., 2017). Selanjutnya, dibangun model matematika dan dilakukan dengan penyelesaian secara numerik menggunakan Metode Keller-Box. Dari hasil numerik diperoleh profil perpindahan panas dengan pengaruh Nilai Prandtl (Pr). Selain itu, penelitian-penelitian terdahulu yang pernah dilakukan adalah penelitian oleh (Afifah & Putra, 2018; El Maghfiroh et al., 2019; HUDOARMA et al., 2018; Imron et al., 2013; Mahat et al., 2017; Mardianto, 2018; Martanegara & Yulianti, 2020; Purnami et al., 2018; Sarif et al., 2013; Sulistyono, 2015; Tiwow et al., 2015).

Dalam penelitian ini, aliran fluida viskoelastik mengalir melewati sebuah permukaan benda berbentuk silinder eliptik. Secara geometri, silinder eliptik dipengaruhi oleh panjang sumbu mayor dan sumbu minor seperti pada Gambar 1. Garis berwarna biru yang dinotasikan dengan a merupakan sumbu minor, sedangkan garis merah yang dinotasikan dengan b merupakan sumbu mayor.



Gambar 1. Geometri silinder eliptik dengan $b > a$

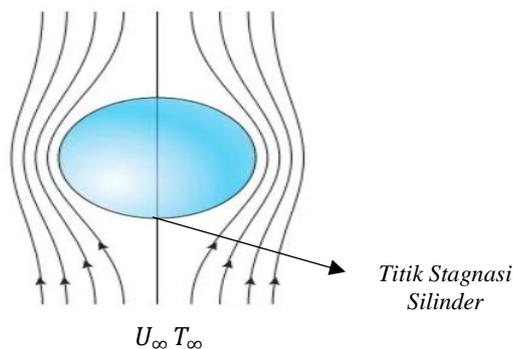
Aliran fluida menghasilkan model matematika dari hasil penerapan persamaan Navier-Stokes, antara lain persamaan massa, persamaan momentum,

dan persamaan energi. Selanjutnya, model matematika tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk similaritas dengan menerapkan teori lapisan batas, sehingga menghasilkan model matematika yang lebih sederhana, yaitu bentuk persamaan differensial biasa. Berikutnya, dilanjutkan dengan proses diskritisasi model secara numerik dengan Metode Beda Hingga dan dilakukan simulasi Matlab. Dari hasil simulasi, diperoleh profil distribusi panas yang dipengaruhi oleh nilai sumbu mayor.

METODE PENELITIAN

Tahap Analisis Awal

Pada tahap ini peneliti menjelaskan tentang proses awal permasalahan dalam studi kasus ini. Fluida viskoelastik mengalir melewati permukaan sebuah silinder eliptik dengan kecepatan dan temperatur yang konstan. Fluida mengalir bersifat *incompressible* dan *unsteady* dengan aliran konveksi bebas yang mengakibatkan timbulnya gaya gesek antara fluida dengan permukaan benda dan menyebabkan timbulnya lapisan batas pada permukaan benda. Area pengamatan dalam penelitian ini adalah pada titik stagnasi terendah silinder, yaitu saat $x \approx 0$. Simulasi aliran pergerakan fluida dijelaskan pada Gambar 2.



Gambar 2. Simulasi pergerakan aliran fluida pada permukaan silinder eliptik

Tahap Implementasi Persamaan

Pada tahap ini peneliti menjelaskan tentang penerapan persamaan Navier-Stokes pada model matematika yang dibangun pada studi kasus ini. Tahap implementasi persamaan dilakukan pada tahapan berikut ini:

1. Membangun persamaan pembangun berdimensi dari turunan persamaan Navier-Stokes, yaitu berupa persamaan massa, momentum, dan energi;
2. Melakukan transformasi pada persamaan berdimensi menjadi persamaan tak berdimensi dengan variable yang telah ditentukan;
3. Melakukan similaritas terhadap persamaan tak berdimensi yang telah diperoleh dengan menggunakan teori lapisan batas.

Tahap Analisis Akhir

Pada tahap ini peneliti menjelaskan tentang hasil dari simulasi numerik yang diselesaikan dengan menggunakan Matlab. Model matematika berupa persamaan tak berdimensi yang diperoleh pada tahap implementasi, didiskritkan dengan skema beda hingga sehingga menghasilkan grafik profil distribusi panas dari aliran fluida pada permukaan silinder dengan bentuk eliptik. Dengan variasi nilai sumbu mayor,

dilakukan proses analisis terhadap hasil simulasi yang didapat. Selanjutnya diperoleh besaran distribusi panas pada setiap titik-titik di permukaan silinder yang dipengaruhi oleh besarnya nilai sumbu mayor dengan parameter-parameter panas yang telah diberikan, yaitu Bilangan Prandtl (Pr), Nilai Kental (K), dan Sumber Panas (γ).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun, yaitu berupa model matematika yang diperoleh dari penurunan persamaan Navier Stokes, dimana persamaan fluida yang didapat merupakan proses penurunan persamaan kekekalan massa (kontinuitas), persamaan momentum, dan persamaan energi pada fluida dengan sifat aliran *incompressible* dan *unsteady* adalah sebagai berikut (Hapsoro & Srigutomo, 2018):

Persamaan massa

Persamaan ini dibangun dari Hukum Konservasi Massa, didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0$$

atau ditulis

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Persamaan Momentum

Persamaan ini dibangun dari Hukum II Newton, didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} dV = \Sigma F$$

pada aliran fluida searah sumbu x dan y dapat ditulis sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \Sigma F \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \Sigma F \quad (3)$$

Persamaan Energi

Persamaan ini dibangun dari Hukum I Termodinamika, didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho \mathbf{V} dV = (\dot{Q} + \dot{W}) \quad (4)$$

Model Matematika Aliran Fluida

Pada penelitian ini, model matematika dibangun dari pergerakan aliran fluida melewati permukaan silinder eliptik dengan karakteristik fluida yang kental dan elastis. Karakteristik tersebut mempengaruhi timbulnya gaya gesek antara fluida dengan permukaan benda, sehingga menimbulkan suatu lapisan batas (*boundary*

layer) pada permukaan silinder. Model matematika yang didapat selanjutnya dengan menggunakan teori lapisan batas, momentum sumbu y bersifat konstan, sehingga persamaan momentum pada sumbu y , yaitu Persamaan (3), dapat diabaikan (Kasim et al., 2015). Dengan mengasumsikan bahwa

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad K = \frac{k_0 Gr^{1/2}}{\rho a^2}, \quad \gamma = \frac{a^2 Q_0}{\nu C_p Gr^{1/2}},$$

$$\sin A = \frac{b \sin B}{a(1 - e^2 \sin^2 B)^2} \quad (5)$$

dan variabel tak berdimensi:

$$v = \frac{a}{\nu} Gr^{-\frac{1}{4}\bar{v}}, \quad \theta = \frac{\bar{T} - \bar{T}_\infty}{q_w a/k}$$

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = Gr^{1/4} \left(\frac{\bar{y}}{a}\right), \quad u = \frac{a}{\nu} Gr^{-\frac{1}{2}\bar{u}} \quad (6)$$

Diperoleh persamaan tak berdimensi sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \theta \sin A \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \gamma \theta \quad (8)$$

Fungsi Arus (*Stream Function*)

Berdasarkan studi kasus yang digunakan pada penelitian ini, fungsi kecepatan yang dinotasikan dengan u dan v merupakan komponen kecepatan yang berada pada arah sumbu x dan y . Untuk menghubungkan dua komponen tersebut, digunakan fungsi arus sebagai berikut:

$$\psi = xk(x, y), \quad \theta = \theta(x, y) \quad (9)$$

dengan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

Dengan melakukan substitusi Persamaan (9) dan Persamaan (10) ke Persamaan (7) dan Persamaan (8), maka didapatkan persamaan pada area pengamatan, yaitu terletak pada titik stagnasi terdekat dengan *blunt body* sebagai berikut:

$$k''' - \frac{\partial \rho}{\partial t} k' + \rho(kk'' - (k')^2) + \theta - K(2k'k''' - kk^{(4)} - (k'')^2) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \theta'' + k\theta' + \gamma \theta \quad (12)$$

dengan kondisi batas yang diberikan:

$$t < 0: \quad k = k' = \theta = 0 \text{ untuk setiap } (x, y),$$

$$t \geq 0: \quad k = k' = 0, \quad \theta = -n \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \text{ untuk } y = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1, \theta = 0 \text{ untuk } y \rightarrow \infty$$

SIMULASI

Pada tahap ini dijelaskan proses penyelesaian secara numerik model matematika. Dengan kondisi batas pada Persamaan (13) dan dengan melakukan substitusi:

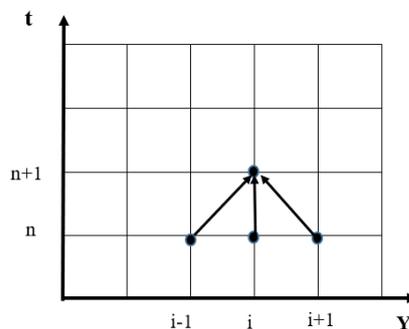
$$\begin{aligned} k' &= p \\ k &= p\Delta y \end{aligned} \tag{14}$$

ke Persamaan (11) dan (12), maka didapatkan persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$p'' + p\Delta y p' - p^2 + \theta \sin A - K(2pp'' - p\Delta y p'''' - (p')^2) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + k\Delta y \theta' + \gamma \theta = 0 \tag{16}$$

Proses numerik diawali dengan melakukan diskritisasi model matematika menggunakan Skema Beda Hingga *Forward Time Center Space (FTCS)* sesuai dengan skema pada Gambar 3.



Gambar 3 Skema Beda Hingga *FTCS*

Selanjutnya, dilakukan proses diskritisasi dengan menggunakan skema berikut: Skema untuk turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

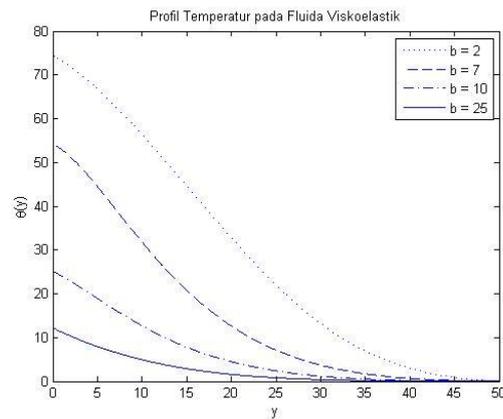
Skema untuk turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Skema untuk turunan ketiga:

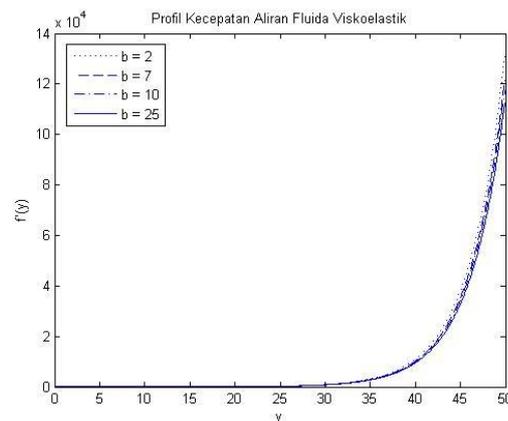
$$\left. \frac{\partial^3 p}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{p_{i+2} - 2p_{i+1} + 2p_{i-1} - p_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2)$$

Dari hasil diskritisasi sesuai dengan skema beda hingga dan kondisi batas yang telah ditentukan, dilakukan proses simulasi dengan menggunakan *software* Matlab dan didapatkan profil distribusi sebagai berikut:



Gambar 4. Profil Distribusi Temperatur Fluida

Dari Gambar 4 dan Gambar 5, diketahui bahwa profil distribusi temperatur dan profil distribusi kecepatan pada permukaan silinder oleh fluida viskoelastik dengan diberikan nilai $Pr = 0.01$, $K = 0.2$, $\gamma = 1$ dan $a = 1$, serta variasi nilai $b = 2; 7; 10; 25$, menghasilkan kestabilan grafik berupa profil temperatur dan kecepatan dengan nilai maksimal temperatur 80 dan nilai maksimal kecepatan fluida 14×10^4 . Semakin besar nilai b yang diberikan, maka distribusi panas pada permukaan benda semakin kecil. Hal tersebut disebabkan karena pengaruh luas penampang benda yang semakin besar, sehingga mengakibatkan distribusi temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin lambat.



Gambar 5. Profil Distribusi Kecepatan Fluida

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan pada hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa besarnya nilai sumbu pada silinder eliptik, yaitu sumbu mayor (b) berpengaruh pada distribusi panas pada permukaan silinder eliptik. Dari hasil yang diperoleh secara numerik, dihasilkan sebuah profil temperatur dengan nilai awal $Pr = 0.01$, $K = 0.2$, $\gamma = 1$ dan $a = 1$, serta variasi nilai $b = 2; 7; 10; 25$. Dengan variasi nilai b tersebut, dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai b , temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin kecil. Hal tersebut disebabkan

karena pengaruh luasnya permukaan benda, sehingga distribusi temperatur dan kecepatan yang dihasilkan semakin lambat

Saran yang dapat penulis berikan untuk penelitian selanjutnya adalah gunakan metode numerik yang lainnya untuk mengetahui perbedaan tingkat akurasi antara skema beda hingga dengan skema lainnya. Selain itu, penulis juga berharap untuk dilakukan variasi terhadap variabel lainnya agar diperoleh hasil simpulan yang semakin variatif.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada bagian ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada pihak yang telah mendukung selama proses pelaksanaan penelitian, khususnya kepada Universitas PGRI Adi Buana Surabaya, perguruan tinggi dimana Penulis berasal, yang telah memberikan kesempatan dan dukungan melalui program Hibah Adi Buana, sehingga penulis diberikan kemudahan dan kelancaran dalam setiap proses menyelesaikan penelitian ini dengan baik dan tepat waktu.

DAFTAR RUJUKAN

- Afifah, Y. N., & Putra, B. C. (2018). Model Matematika Aliran Tak Tunak Pada Nano Fluid Melewati Bola Teriris Dengan Pengaruh Medan Magnet. *Teknika: Engineering and Sains Journal*, 2(2), 119. <https://doi.org/10.51804/tesj.v2i2.274.119-124>
- El Maghfiroh, R., Khusniah, R., & Sholeh, M. (2019). SIMULASI NUMERIK PERPINDAHAN PANAS BATANG BAJA MENGGUNAKAN SKEMA BEDA HINGGA KOMPAK PADA METODE CRANK-NICOLSON. *Transformasi: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*. <https://doi.org/10.36526/tr.v3i02.708>
- Hapsoro, C. A., & Srigutomo, W. (2018). 2-D Fluid Surface Flow Modeling using Finite-Difference Method Pemodelan Aliran Fluida 2-D Pada Kasus Aliran Permukaan 2-D Fluid Surface Flow Modeling using Finite-Difference Method. August 2013.
- Haslinda Kusumaningsih, Hamidi, N., & Sabila, A. F. (2019). Fluida Non Newtonian. *Rekayasa Mesin*, 12(December), 317–326.
- HUDOARMA, F. M., GUNAWAN, P. H., & ROHMAWATI, A. A. (2018). Analisis Aliran Darah Dalam Pembuluh Arteri Menggunakan Persamaan Navier-Stokes Dan Metode Lattice-Boltzmann. *E-Jurnal Matematika*, 7(2), 102. <https://doi.org/10.24843/mtk.2018.v07.i02.p191>
- Imron, C., Suhariningsih, Widodo, B., & Yuwono, T. (2013). Numerical simulation of fluid flow around circular and I-shape cylinder in a tandem configuration. *Applied Mathematical Sciences*. <https://doi.org/10.12988/ams.2013.39490>
- Kasim, A. R. M., Jiann, L. Y., Rawi, N. A., Ali, A., & Shafie, S. (2015). Mixed Convection Flow of Viscoelastic Fluid over a Sphere under Convective Boundary Condition Embedded in Porous Medium. *Defect and Diffusion Forum*. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.362.67>
- Mahat, R., Rawi, N. A., Kasim, A. R. M., & Shafie, S. (2017). Mixed convection boundary layer flow of viscoelastic nanofluid past a horizontal circular cylinder: Case of constant heat flux. *Journal of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012052>

- Mardianto, L. (2018). *Solusi Numerik dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Konveksi Campuran Melalui Bola Bermagnet-Numerical Solution Of The Model Of*
- Martanegara, H. A., & Yulianti, K. (2020). Model Matematika Fluida Lapisan Tipis Pada Bidang Miring. *Jurnal EurekaMatika*, 8(1), 29–41.
- Mohd Sohut, N. F. H., Soid, S. K., Abu Bakar, S., & Ishak, A. (2022). Unsteady Three-Dimensional Flow in a Rotating Hybrid Nanofluid over a Stretching Sheet. *Mathematics*, 10(3), 348. <https://doi.org/10.3390/math10030348>
- Purnami, D., Putri, S., Sukarsa, I. M., Ngurah, G., & Agustika, S. (2018). *Analisis Kestabilan Numerik Metode Beda Hingga pada Persamaan Getaran Membran dan Simulasinya. September*, 8–11.
- Sarif, N. M., Salleh, M. Z., & Nazar, R. (2013). Numerical solution of flow and heat transfer over a stretching sheet with newtonian heating using the keller box method. *Procedia Engineering*. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.02.070>
- Sulistiyono, B. A. (2015). Aplikasi Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Pada Persamaan Konduksi Panas. *Math Educator Nusantara*.
- Tiwow, V. A., Malago, J. D., Fisika, J., Matematika, F., & Alam, P. (2015). *Penerapan Persamaan Navier-Stokes Untuk Kasus Aliran Fluida Laminer Pada Pipa Tidak Horizontal Application of Navier-Stokes Equations To Laminar Fluid Flow Case In Unhorizontal Pipe. IV(1)*, 51–56.