JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 7 No. 2 September 2022 Halaman 117-126
Tersedia secara online di https://www.journal.unipdu.ac.id/index.php/jmpm
Terakreditasi S3 – SK No. B/1796/E5.2/KI.02.00/2020

Print-ISSN : 2502-986X
Online-ISSN : 2502-9878
Unipdu JOMBANG
JMPM Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Journals of Mathematics and Mathematics Education

Direct Product dan *Direct Sum* dari Keluarga Grup Abelian

(*Direct Product and Direct Sum from Abelian Group Family*)

Denik Agustito[1*], Krida Singgih Kuncoro[2], Istiqomah[3], Sukiyanto[4]
[1,2,3,4] Prodi Pendidikan Matematika, Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa – Kota Yogyakarta, DI. Yogyakarta, Indonesia
*email penulis korespondensi: agustito@ustjogja.ac.id

Abstrak

Eksistensi dari *direct product* dalam kategori grup abelian ada; jika diberikan keluarga grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ maka *direct product*nya adalah $\prod_{i\in I} G_i$ dan *extrenal direct sum*nya juga ada yaitu $\sum_{i\in I} G_i$. Kemudian jika diberikan sebuah keluarga subgrup normal dari grup abelian G yaitu $\{N_i | i \in I\}$, maka *internal direct sum*nya juga ada dan dinotasikan dengan $G = \bigoplus_{i\in I} N_i$.

Kata kunci: *Direct product, External direct sum, Internal direct sum*

Abstract

The existence of direct products in the abelian group category exists; if given abelian group family that is $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ then the direct product is $\prod_{i\in I} G_i$ and there is also an external direct sum, namely $\sum_{i\in I} G_i$. and there is also an external direct sum, namely $\{N_i | i \in I\}$, then the internal direct sum also exists and is denoted by $G = \bigoplus_{i\in I} N_i$.

Keywords: *Direct product, External direct sum, Internal direct sum*

Cara mengutip dengan APA 6 style: Agustito, D., Kuncoro, K.S., Istiqomah, Sukiyanto. (2022). *Direct Product* dan *Direct Sum* dari Keluarga Grup Abelian. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, *7*(2), 117-126. https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v7i2.3044.

PENDAHULUAN

Pandang himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan kemudian dengan himpunan bilangan real tersebut diperoleh sebuah himpunan baru melalui gagasan hasil kali kartesian yang dinamakan dengan ruang Euclid berdimensi-n dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}^n$. Pada ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ memiliki sebuah subruang yang menarik, katakan bola berdimensi-$(n-1)$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, kemudian bola tertutup berdimensi-n yang dinotasikan dengan $\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$. Dari bola berdimensi-$n$ yaitu $\mathbb{S}^n$ didefinisikan ruang proyektif real $\mathbb{R}P^n$ sebagai ruang faktor dengan mengidentifikasi setiap pasangan dari titik antipodal. Kemudian dari bola dan bola tertutup, bisa didefinisikan sebuah torus, pita Mobius, botol Klein. Dalam kasus ini, jelas bahwa ruang-ruang tersebut adalah ruang topologi baru yang dikonstruksi melalui cara yang seragam, melalui sifat universal sehingga ruang yang dikonstruksi merupakan *limit* atau *colimit* dari diagram khusus dalam kategori dari ruang topologi (Riehl,2014). Kemudian *limit* dan *colimit* bisa didefinisikan dalam kategori apapun, dan kasus khusus dari *limit* dan *colimit* adalah *product, coproduct, equalizer, coequalizer, pul-back* dan *push-out*.

Tujuan dalam tulisan ini adalah untuk mengetahui eksistensi dan sifat-sifat dari kasus *limit* dan *colimit* yaitu *product* dan *coproduct* dengan mengingat bahwa konstruksi *product* dan *coproduct* memiliki aplikasi sangat penting dalam teori grup abelian berhingga. Aplikasi dari *product* dan *coproduct* dalam kategori grup abelian telah dikaji secara kritis dalam (Grillet, 2000; Hungerford, 1974). *product* dalam kategori grup abelian dinamakan dengan *direct product* dan *coproduct* dalam kategori grup abelian dinamakan dengan *direct sum*. Beberapa perkembangan dari *product* pada suatu kategori bisa ditemui dalam (Agustito, 2022; Batubenge, 2014; Ejagwa, 2017; Hu, 1995; Trenard, 2001). Sedangkan perkembangan dari *coproduct* pada suatu kategori bisa ditemui dalam (Amini, 2010; Batubenge, 2014; Ellerman, 2016; Hu, 1995; Luerssen, 2022; Tuganbaev, 1996).

METODE PENELITIAN

Metode pada penelitian ini merupakan kajian literatur. Diawali dengan membaca buku dan paper terkait *limit* dan *colimit* dari suatu kategori yang pada kasus adalah *product* dan *coproduct,* maka penulis akan meneliti keberadaan dari *product* dan *coproduct* dari kategori grup abelian keberadaan *product* dan *coproduct* dalam kategori grup abelian adalah ada dan akan digunakan secara berturut-turut sebagai *direct product* dan *direct sum* dan mengkaji konstruksi dan sifat-sifatnya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Grup abelian G akan dipahami sebagai pasangan $(G,+)$ dimana + adalah operasi binernya dan jika diberikan $a \in G$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $a^n \stackrel{\text{def}}{=} a + \cdots + a = na$, serta elemen identitas pada G akan dinotasikan dengan 0, kemudian jika diberikan $a \in G$ maka inversnya akan dinotasikan dengan $-a$. Jika diberikan dua buah grup abelian yaitu $(G_1, +_1)$ dan $(G_2, +_2)$ maka diperoleh grup abelian baru yang dibentuk melalui gagasan *cartesian product* yaitu $G_1 \times G_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in G_1 \text{ dan } x_2 \in G_2\}$ dimana operasi biner padanya didefinisikan dengan $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2)$ untuk semua $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$. Jika diberikan keluarga berhingga dari grup abelian yaitu $(G_1, +_1), \dots, (G_n, +_n)$ maka dengan gagasan *cartesian product* diperoleh grup abelian baru yaitu $G_1 \times \dots \times G_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n\}$ dimana operasi biner padanya didefinisikan dengan $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$ untuk semua $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in G_1 \times \dots \times G_n$. Jika diberikan keluarga tak-berhingga terbilang dari grup abelian yaitu $\{(G_n, +_n) | n \in \mathbb{N}\}$ maka diperoleh grup abelian baru yang dibentuk melalui gagasan *cartesian product* yaitu $\prod_n G_n = \{\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in G_n, \text{untuk semua } n \in \mathbb{N}\}$ dimana operasi biner padanya didefinisikan dengan $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} + \langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} = \langle x_n +_n y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ untuk $\langle x_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}, \langle y_n\rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_n G_n$. Jika diberikan keluarga berindeks I dari grup abelian $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$, maka dapat dibentuk sebuah grup abelian baru seperti pada contoh sebelumnya yaitu dengan menggunakan *cartesian product*.

Dengan mengacu pada (Hungerford, 1974; Awodey, 2010; Leinster, 2016; Spivak, 2014) jika diberikan keluarga berindeks I dari himpunan yaitu $\{A_i | i \in I\}$ maka diperoleh *cartesian product* dari keluarga himpunan berikut adalah $\prod_{i\in I} A_i = \{f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \,|f(i) \in A_i, \text{untuk semua } i \in I\}$. Begitupun juga diberikan keluarga berindeks I dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$, maka diperoleh grup abelian baru yang dibentuk dari *cartesian product* yaitu $(\prod_{i\in I} G_i, +)$ dengan $\prod_{i\in I} G_i = \{f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \,|f(i) \in G_i, \text{untuk semua } i \in I\}$ dan operasi binernya didefinisikan yaitu sebagai berikut: jika $f, g \in \prod_{i\in I} G_i$ maka $f + g \in \prod_{i\in I} G_i$ dimana $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$ untuk semua $i \in I$. Elemen identitas pada $\prod_{i\in I} G_i$ adalah $O: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ yang sifatnya $O(i) = 0_i$ dimana 0_i adalah elemen identitas pada grup abelian $(G_i, +_i)$ untuk semua $i \in I$. Jika diberikan $f \in \prod_{i\in I} G_i$ maka invers dari f adalah elemen $-f \in \prod_{i\in I} G_i$ yang didefinisikan dengan $(-f)(i) = -f(i)$ untuk semua $i \in I$. Menurut (Hungerford,1974) setiap elemen $f \in \prod_{i\in I} G_i$ bisa diidentifikasi menjadi seperti *barisan* yang dinotasikan dengan $\langle x_i\rangle_{i\in I}$ yang memenuhi sifat $x_i \in G_i$ untuk semua $i \in I$. Jadi jika $I = \{1,2\}$ maka diperoleh $\prod_{i\in I} G_i = G_1 \times G_2$, jika $I = \{1, \dots, n\}$ maka diperoleh $\prod_{i\in I} G_i = G_1 \times \dots \times G_n$, dan jika $I = \mathbb{N}$ maka diperoleh $\prod_{i\in I} G_i = \prod_n G_n$. Pada Grillet, gagasan ini diperluas ke dalam *cartesian product* dari keluarga berindeks I dari R-modul $\{M_i | i \in I\}$ yaitu elemen dari $\prod_{i\in I} M_i$ terdiri dari semua *barisan* $\langle m_i\rangle_{i\in I}$ dimana $m_i \in G_i$ untuk semua $i \in I$.

Teorema 1.1. Jika diberikan keluarga berindeks I dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ dan $\prod_{i\in I} G_i$ adalah *cartesian product*-nya, maka pemetaan $\pi_k: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_k$ untuk semua $k \in I$ yang didefinisikan dengan $\pi_k(f) = f(k)$ (atau $\pi_k(\langle x_i\rangle_{i\in I}) = x_k$) adalah epimorfisma grup.

Bukti:

Diketahui pemetaan $\pi_k: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_k$ yang didefinisikan dengan $\pi_k(f) = f(k)$ untuk semua $k \in I$.

(i). Ambil sembarang $f, g \in \prod_{i\in I} G_i$.

Jelas $\pi_k(f + g) = (f + g)(k) = f(k) +_k g(k) = \pi_k(f) +_k \pi_k(g)$ untuk semua $k \in I$.

Jadi $\pi_k: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_k$ adalah homomorfisma grup.

(ii). Ambil sembarang $y \in G_k$.

Jelas terdapat sebuah pemetaan $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ dengan $f(k) = y$ untuk suatu $k \in I$.

Jelas $\pi_k(f) = f(k) = y$.

Jadi terdapat pemetaan $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \prod_{i\in I} G_i$ yang sifatnya $\pi_k(f) = f(k) = y$.

Jadi $\pi_k: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_k$ adalah surjektif.

Dari (i) dan (ii), diperoleh $\pi_k: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_k$ yang didefinisikan dengan $\pi_k(f) =$

$f(k)$ untuk semua $k \in I$ adalah epimorfisma grup.
Epimorfisma grup tersebut biasanya dinamakan dengan *canonical projection*.

Teorema 1.2. (Sifat Universal dari *Direct Product*). Diberikan keluarga dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$. Grup abelian $(\prod_{i\in I} G_i, +)$ bersama dengan keluarga dari *canonical projection* $\{\pi_i: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_i | i \in I\}$ memiliki sifat berikut: Jika diberikan sembarang grup abelian H dan keluarga dari homomorfisma grup yaitu $\{\varphi_i: H \longrightarrow G_i | i \in I\}$ maka terdapat secara tunggal homomorfisma grup $\varphi: H \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ yang sifatnya $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ untuk semua $i \in I$.
Bukti:
Diketahui grup abelian $(\prod_{i\in I} G_i, +)$ dan keluarga dari *canonical projection* yaitu $\{\pi_i: \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_i | i \in I\}$.
Ambil sembarang grup abelian H dan keluarga dari homomorfisma grup yaitu $\{\varphi_i: H \longrightarrow G_i | i \in I\}$.
Definisikan pengaitan $\varphi: H \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ yang didefinisikan dengan $\varphi(h) = f_h$ dimana $f_h: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ didefinisikan dengan $f_h(i) = \varphi_i(h)$ untuk semua $h \in H$.
(i). Jelas bahwa untuk setiap $h \in H$ terdapat pemetaan $f_h: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i$ dengan $f_h(i) = \varphi_i(h)$ untuk semua $h \in H$ yang memenuhi sifat $\varphi(h) = f_h$.
(ii). Ambil sembarang $h_1, h_2 \in H$ dengan $h_1 = h_2$.
Jelas $\varphi(h_1) = f_{h_1}$ dengan $f_{h_1}(i) = \varphi_i(h_1)$ untuk semua $i \in I$.
Karena $h_1 = h_2$, jelas diperoleh $f_{h_1}(i) = \varphi_i(h_1) = \varphi_i(h_2) = f_{h_2}(i)$ untuk semua $i \in I$.
Karena $f_{h_1}(i) = \varphi_i(h_1) = \varphi_i(h_2) = f_{h_2}(i)$ untuk semua $i \in I$, jelas diperoleh $\varphi(h_1) = f_{h_1} = f_{h_2} = \varphi(h_2)$.
Jadi diperoleh jika $h_1, h_2 \in H$ dengan $h_1 = h_2$ maka $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$.
Dari (i) dan (ii), diperoleh pengaitan $\varphi: H \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ yang didefinisikan dengan $\varphi(h) = f_h$ adalah *well-defined*.

Ambil sembarang $h_1, h_2 \in H$.
Jelas $\varphi(h_1 +_H h_2) = f_{h_1 +_H h_2}$ dimana $f_{h_1 +_H h_2}(i) = \varphi_i(h_1 +_H h_2)$ untuk semua $i \in I$.
Karena φ_i adalah homomorfisma grup untuk semua $i \in I$, jelas diperoleh $\varphi_i(h_1 +_H h_2) = \varphi_i(h_1) +_i \varphi_i(h_2)$.
Karena $\varphi_i(h_1 +_H h_2) = \varphi_i(h_1) +_i \varphi_i(h_2)$ untuk semua $i \in I$, jelas diperoleh $f_{h_1 +_H h_2}(i) = \varphi_i(h_1 +_H h_2) = \varphi_i(h_1) +_i \varphi_i(h_2) = f_{h_1}(i) + f_{h_2}(i)$ untuk semua $i \in I$.
Karena $f_{h_1 +_H h_2}(i) = f_{h_1}(i) + f_{h_2}(i)$ untuk semua $i \in I$, jelas diperoleh $\varphi(h_1 +_H h_2) = f_{h_1 +_H h_2} = f_{h_1} + f_{h_1} = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$ untuk semua $h_1, h_2 \in H$.
Jadi $\varphi(h_1 +_H h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2)$ untuk semua $h_1, h_2 \in H$.
Jadi $\varphi: H \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ yang didefinisikan dengan $\varphi(h) = f_h$ adalah homomorfisma grup.

Misalkan ada homomorfisma grup yang lain yaitu $\varphi': H \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ yang sifatnya

$\pi_i \circ \varphi' = \varphi_i$ untuk semua $i \in I$.
Karena $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ dan $\pi_i \circ \varphi' = \varphi_i$, jelas $\pi_i \circ \varphi = \pi_i \circ \varphi'$.
Jelas $(\pi_i \circ \varphi)(h) = (\pi_i \circ \varphi')(h)$ untuk semua $h \in H$.
Jelas $\pi_i\big(\varphi(h)\big) = \varphi(h)(i)$ dan $\pi_i\big(\varphi'(h)\big) = \varphi'(h)(i)$ untuk semua $i \in I$.
Karena $(\pi_i \circ \varphi)(h) = (\pi_i \circ \varphi')(h)$ untuk semua $h \in H$, jelas $\varphi(h)(i) = \varphi'(h)(i)$ untuk semua $i \in I$.
Karena $\varphi(h)(i) = \varphi'(h)(i)$ untuk semua $i \in I$, jelas $\varphi(h) = \varphi'(h)$ untuk semua $h \in H$.
Karena $\varphi(h) = \varphi'(h)$ untuk semua $h \in H$, jelas $\varphi = \varphi'$.
Jadi homomorfisma grup φ bersifat tunggal yang sifatnya $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ untuk semua $i \in I$.

Remark 1.3. *Cartesian product* dari grup abelian yaitu $\prod_{i\in I} G_i$ dalam Teorema 1.4 dinamakan *direct product* dari keluarga grup abelian $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ dan diperoleh eksistensi dari *product* dalam kategori grup abelian ada.

Definisi 1.4. Diberikan sebuah keluarga berindeks I dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$. *External direct sum* dari $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ adalah himpunan yang didefinisikan dengan $\sum_{i\in I} G_i = \{f \in \prod_{i\in I} G_i \,|\, f(i) = 0_i \textit{ hampir semua } i \in I\}$.

Remark 1.5. Elemen dari *external direct sum* $\sum_{i\in I} G_i$ juga bisa dipandang sebagai barisan $\langle x_i \rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ yang sifatnya $x_i = 0_i$ *hampir semua* $i \in I$.

Remark 1.6. Kata hampir semua $i \in I$ dalam Definisi 1.4 artinya banyaknya i adalah berhingga yang menjadikan $f(i) \neq 0_i$.

Contoh 1.7. Jika $G_n = \mathbb{Z}$ maka barisan $\langle 1,2,3, \dots \rangle$ adalah elemen dari $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ sedangkan barisan $\langle 3,2,1,0,0,0,0, \dots \rangle$ adalah elemen dari $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ karena pada barisan tersebut, suku-suku yang tidak sama dengan nol, banyaknya berhingga.

Teorema 1.8. Diberikan keluarga dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$. *External direct sum* $\sum_{i\in I} G_i$ merupakan sub-grup dari *direct product* $\prod_{i\in I} G_i$.
Bukti:
Ambil sembarang $f, g \in \sum_{i\in I} G_i$.
Jelas $f(i) = 0_i$ dan $g(i) = 0_i$ *hampir semua* $i \in I$.
Jelas $(f - g)(i) = f(i) -_i g(i) = 0_i$ *hampir semua* $i \in I$.
Jadi $f - g \in \sum_{i\in I} G_i$.
Jadi $\sum_{i\in I} G_i$ merupakan sub-grup dari *direct product* $\prod_{i\in I} G_i$.

Teorema 1.9. Jika diberikan keluarga berindeks I dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ dan $\sum_{i\in I} G_i$ adalah *external direct sum*-nya, maka pemetaan $\tau_k : G_k \longrightarrow \sum_{i\in I} G_i$ untuk semua $k \in I$ yang didefinisikan dengan $\tau_k(x) = \langle x_i \rangle_{i\in I}$ dimana $x_i = \begin{cases} x & , i = k \\ 0_i & , i \neq k \end{cases}$ adalah monomorfisma grup.
Bukti:

Diketahui pemetaan $\tau_k : G_k \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i$ untuk semua $k \in I$ yang didefinisikan dengan $\tau_k(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$ dimana $x_i = \begin{cases} x & ,i = k \\ 0_i & ,i \neq k \end{cases}$.

(i). Ambil sembarang $x, y \in G_k$.
Jelas $\tau_k(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$ dimana $x_i = \begin{cases} x & ,i = k \\ 0_i & ,i \neq k \end{cases}$ dan $\tau_k(y) = \langle y_i \rangle_{i \in I}$ dimana $y_i = \begin{cases} y & ,i = k \\ 0_i & ,i \neq k \end{cases}$.
Jelas $\tau_k(x + y) = \langle x_i + y_i \rangle_{i \in I}$ dimana $x_i + y_i = \begin{cases} x + y & ,i = k \\ 0_i & ,i \neq k \end{cases}$.
Jelas $\tau_k(x + y) = \langle x_i + y_i \rangle_{i \in I} = \langle x_i \rangle_{i \in I} + \langle y_i \rangle_{i \in I} = \tau_k(x) + \tau_k(y)$.
Jadi $\tau_k : G_k \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i$ adalah homomorfisma grup.

(ii). Ambil sembarang $x \in \ker \tau_k$.
Jelas $\tau_k(x) = \langle 0_i \rangle_{i \in I}$.
Jelas $\langle x_i \rangle_{i \in I} = \langle 0_i \rangle_{i \in I}$ yang sifatnya $x_i = 0_i$ *hampir semua* $i \in I$.
Jelas $x_i = 0_i$ untuk semua $i \in I$.
Akibatnya $x = x_i = 0_k$ untuk $i = k$.
Jelas $x = 0_k$.
Jadi $\ker \tau_k = \{0_k\}$.
Jadi $\tau_k : G_k \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i$ adalah injektif.

Dari (i) dan (ii), diperoleh $\tau_k : G_k \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i$ untuk semua $k \in I$ yang didefinisikan dengan $\tau_k(x) = \langle x_i \rangle_{i \in I}$ dimana $x_i = \begin{cases} x & ,i = k \\ 0_i & ,i \neq k \end{cases}$ adalah monomorfisma grup.

Monomorfisma grup tersebut biasanya dinamakan dengan *canonical injection*.

Teorema 1.10. (Sifat Universal dari *Direct Sum*). Diberikan keluarga dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$. Grup abelian $(\sum_{i \in I} G_i, +)$ bersama dengan keluarga dari *canonical injection* $\{\tau_i : G_i \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i \,|\, i \in I\}$ memiliki sifat berikut: Jika diberikan sembarang grup abelian H dan keluarga dari homomorfisma grup yaitu $\{\psi_i : G_i \longrightarrow H | i \in I\}$ maka terdapat secara tunggal homomorfisma grup $\psi : \sum_{i \in I} G_i \longrightarrow H$ yang sifatnya $\psi \circ \tau_i = \psi_i$ untuk semua $i \in I$.

Bukti:

Diketahui grup abelian $(\sum_{i \in I} G_i, +)$ bersama dengan keluarga dari *canonical injection* $\{\tau_i : G_i \longrightarrow \sum_{i \in I} G_i \,|\, i \in I\}$.

Ambil sembarang grup abelian H dan keluarga dari homomorfisma grup yaitu $\{\psi_i : G_i \longrightarrow H | i \in I\}$.

Jika diberikan $\langle x_i \rangle_{i \in I} \in \sum_{i \in I} G_i$, maka terdapat banyaknya berhingga x_i, notasikan dengan $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$.

Definisikan pemetaan $\psi : \sum_{i \in I} G_i \longrightarrow H$ sebagai berikut:

$$\psi(\langle x_i \rangle_{i \in I}) = \begin{cases} 0 & ,\langle x_i \rangle_{i \in I} = \langle 0_i \rangle_{i \in I} \\ \displaystyle\sum_{i \in I_0} \psi_i(x_i) & ,\langle x_i \rangle_{i \in I} \neq \langle 0_i \rangle_{i \in I} \end{cases}$$

dimana $I_0 = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} = \{i \in I | x_i \neq 0_i\}$.

Ambil sembarang $\langle x_i\rangle_{i\in I}, \langle y_i\rangle_{i\in I} \in \sum_{i\in I} G_i$.
Kasus $\langle x_i\rangle_{i\in I} = \langle 0_i\rangle_{i\in I}$ atau $\langle y_i\rangle_{i\in I} \neq \langle 0_i\rangle_{i\in I}$:
Jelas $\psi(\langle x_i\rangle_{i\in I}, +\langle y_i\rangle_{i\in I}) = \psi(\langle x_i + y_i\rangle_{i\in I}) = \sum_{i\in I_0} \psi_i(0_i + y_i) = \sum_{i\in I_0} \psi_i(y_i) = \psi(\langle y_i\rangle_{i\in I}) = \psi(\langle x_i\rangle_{i\in I}) + \psi(\langle y_i\rangle_{i\in I})$.
Kasus $\langle x_i\rangle_{i\in I} \neq \langle 0_i\rangle_{i\in I}$ atau $\langle y_i\rangle_{i\in I} = \langle 0_i\rangle_{i\in I}$:
Analog seperti pada kasus sebelumnya.
Kasus $\langle x_i\rangle_{i\in I} \neq \langle 0_i\rangle_{i\in I}$ atau $\langle y_i\rangle_{i\in I} \neq \langle 0_i\rangle_{i\in I}$:
Tulis $J_0 = \{i \in I | x_i + y_i \neq 0\}$ adalah himpunan berhingga.
Jelas $\psi(\langle x_i\rangle_{i\in I}, +\langle y_i\rangle_{i\in I}) = \psi(\langle x_i + y_i\rangle_{i\in I}) = \sum_{i\in J_0} \psi_i(x_i + y_i) = \sum_{i\in J_0} \psi_i(x_i) + \sum_{i\in J_0} \psi_i(y_i) = \psi(\langle x_i\rangle_{i\in I}) + \psi(\langle y_i\rangle_{i\in I})$.
Jadi $\psi: \sum_{i\in I} G_i \longrightarrow H$ adalah homomorfisma grup.

Misalkan ada homomorfisam grup yang lain yaitu $\xi: \sum_{i\in I} G_i \longrightarrow H$ yang sifatnya $\xi \circ \tau_i = \psi_i$ untuk semua $i \in I$.
Jelas $\xi(\langle x_i\rangle_{i\in I}) = \xi\left(\sum_{i\in I_0} \tau_i(x_i)\right)$
$= \sum_{i\in I_0} \xi\left(\tau_i(x_i)\right)$ (karena ξ adalah homomorfisma grup)
$= \sum_{i\in I_0} \psi_i(x_i)$ (karena $\xi \circ \tau_i = \psi_i$)
$= \sum_{i\in I_0} \psi\left(\tau_i(x_i)\right)$ (karena $\psi \circ \tau_i = \psi_i$)
$= \psi\left(\sum_{i\in I_0} \tau_i(x_i)\right)$ (karena ψ adalah homomorfisma grup)
$= \psi(\langle x_i\rangle_{i\in I})$.
Jelas $\xi(\langle x_i\rangle_{i\in I}) = \psi(\langle x_i\rangle_{i\in I})$ untuk semua $\langle x_i\rangle_{i\in I} \in \sum_{i\in I} G_i$.
Jadi homomorfisma grup $\psi: \sum_{i\in I} G_i \longrightarrow H$ bersifat tunggal yang sifatnya $\psi \circ \tau_i = \psi_i$ untuk semua $i \in I$.

Diberikan sebuah grup abelian $(G, +)$ dan $\{N_i | i \in I\}$ adalah keluarga subgrup normal darinya. Kemudian bentuk subgrup berikut:

$$\langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle = \{\textstyle\sum_{i\in I} n_i \, | n_i \in N_i, \text{untuk semua } i \in I\}$$

Teorema 1.11. Jika diberikan sebuah grup abelian $(G, +)$ dan $\{N_i | i \in I\}$ adalah keluarga subgrup normal darinya yang memenuhi sifat berikut:
(i). $G = \langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle$.
(ii). Untuk setiap $k \in I, N_k \cap \langle \bigcup_{i\neq k} N_i \rangle = \{0\}$
maka G isomorfik dengan $\sum_{i\in I} N_i$.
Bukti:
Pandang pemetaan $\varphi: \sum_{i\in I} N_i \longrightarrow G$ yang didefinisikan dengan $\varphi(\langle n_i\rangle_{i\in I}) = \sum_{i\in I_0} n_i$ dimana $I_0 = \{i \in I | n_i \neq 0\}$ adalah himpunan berhingga.
(i). Ambil sembarang $\langle m_i\rangle_{i\in I}, \langle n_i\rangle_{i\in I} \in \sum_{i\in I} N_i$.
Tulis $J_0 = \{i \in I | m_i \neq 0\}$ dan $I_0 = \{i \in I | n_i \neq 0\}$ adalah himpunan berhingga.

Jelas $\varphi(\langle m_i\rangle_{i\in I} + \langle n_i\rangle_{i\in I}) = \varphi(\langle m_i + n_i\rangle_{i\in I}) = \sum_{i\in J_0\cap I_0}(m_i + n_i) = \sum_{i\in J_0} m_i + \sum_{i\in I_0} n_i = \varphi(\langle m_i\rangle_{i\in I}) + \varphi(\langle n_i\rangle_{i\in I})$.
Jadi $\varphi\colon \sum_{i\in I} N_i \longrightarrow G$ adalah homomorfisma grup.

(ii). Ambil sembarang $\langle n_i\rangle_{i\in I} \in \ker(\varphi)$.
Jelas $\varphi(\langle n_i\rangle_{i\in I}) = 0$.
Jelas $\sum_{i\in I_0} n_i = 0$.
Jelas $n_k = -\sum_{\substack{i\neq k\\ i\in I_0}} n_i \in N_k \cap \langle \bigcup_{i\neq k} N_i\rangle$ untuk setiap $k \in I_0$.
Karena $N_k \cap \langle \bigcup_{i\neq k} N_i\rangle = \{0\}$, jelas $n_k = 0$ untuk setiap $k \in I_0$.
Lebih lanjut $n_k = 0$ untuk setiap $k \in I$.
Jadi $\langle n_i\rangle_{i\in I} = \langle 0\rangle$.
Jadi $\varphi\colon \sum_{i\in I} N_i \longrightarrow G$ adalah monomorfisma.

(iii). Ambil sembarang $y \in G$.
Karena $G = \langle \bigcup_{i\in I} N_i\rangle$, jelas $y = \sum_{i\in I} n_i$ hampir semua $n_i = 0$ untuk semua $i \in I$.
Pilih $x = \langle n_i\rangle_{i\in I}$ hampir semua $n_i = 0$ untuk semua $i \in I$.
Jelas $\varphi(\langle n_i\rangle_{i\in I}) = \sum_{i\in I} n_i = y$ hampir semua $n_i = 0$ untuk semua $i \in I$.
Jadi $\varphi\colon \sum_{i\in I} N_i \longrightarrow G$ adalah epimorfisma.

Dari (i), (ii) dan (iii), jelas $\varphi\colon \sum_{i\in I} N_i \longrightarrow G$ adalah isomorfisma.
Jadi G isomorfik dengan $\sum_{i\in I} N_i$.

Remark 1.12. Jika G isomorfik dengan $\sum_{i\in I} N_i$ seperti dalam Teorema 1.11, maka akan ditulis sebagai berikut:

$$G = \bigoplus_{i\in I} N_i$$

dan diperoleh eksistensi dari *coproduct* dalam kategori dari grup abelian ada.

Akibat 1.13. Jika diberikan sebuah grup abelian G dan $N_1, \dots, N_n$ adalah subgrup-subgrup normal dari G yang memenuhi sifat berikut:

(i). $G = \langle \bigcup_{i=1}^{n} N_i\rangle = N_1 + \dots + N_n = \{n_1 + \dots + n_n \mid n_i \in N_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$.
(ii). Untuk setiap $1 \leq k \leq n$, $N_k \cap (N_1 + \dots + N_{k-1} + N_{k+1} + \dots + N_n) = \{0\}$.

maka

$$G = N_1 \oplus \dots . \oplus N_n$$

Bukti:
Bukti jelas didasarkan pada Teorema 1.11 dengan kasus $I = \{1, \dots, n\}$.

Teorema 1.14. Jika diberikan sebuah grup abelian G dan $N_1, \dots, N_n$ adalah subgrup-subgrup normal dari G yang memenuhi sifat $G = N_1 \oplus \dots . \oplus N_n$ maka $\forall g \in G, g \neq 0$ dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk

$$g = n_1 + \dots + n_n$$

dimana $n_i \in N_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Bukti:
Diketahui $\forall g \in G, g \neq 0$ dapat ditulis $g = n_1 + \cdots + n_n$ dengan $n_i \in N_i, i \in \{1, \dots, n\}$.
Misalkan $g = m_1 + \cdots + m_n$ dengan $m_i \in N_i, i \in \{1, \dots, n\}$.
Jelas $m_1 + \cdots + m_n = n_1 + \cdots + n_n$.
Jelas $m_k - n_k = (n_1 + \cdots + n_{k-1} + n_{k+1} + \cdots + n_n) - (m_1 + \cdots + m_{k-1} + m_{k+1} + \cdots + m_n) \in N_k \bigcap (N_1 + \cdots + N_{k-1} + N_{k+1} + \cdots + N_n)$.
Karena $N_k \bigcap (N_1 + \cdots + N_{k-1} + N_{k+1} + \cdots + N_n) = \{0\}$, jelas $m_k - n_k = 0$ untuk setiap $1 \leq k \leq n$.
Jadi $m_k = n_k$ untuk setiap $1 \leq k \leq n$.
Jadi $g = m_1 + \cdots + m_n = n_1 + \cdots + n_n$.
Jadi penulisan $g = n_1 + \cdots + n_n$ bersifat tunggal.

Contoh 1.15. Diberikan grup abelian $G = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \middle| r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \right\}$ terhadap operasi penjumlahan vector pada $\mathbb{R}^n$. Bentuk subgrup normal $N_k = \left\langle \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle$ adalah subgrup siklik yang dibangun oleh vector $\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ dimana koordinat ke-k bernilai 1 dan lainnya bernilai 0, untuk setiap $1 \leq k \leq n$. Jelas bahwa $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari tulisan ini adalah bahwa eksistensi dari *product* dan *coproduct* yaitu berturut-turut *direct product* dan *direct sum* dalam kategori dari grup abelian ada. Jika diberikan keluarga dari grup abelian yaitu $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$, maka *product*nya yaitu *direct product* dari keluarga grup abelian tersebut adalah $\prod_{i \in I} G_i$ dan memenuhi sifat universal seperti yang ada pada Teorema 1.2, sedangkan *coproduct*nya yaitu *direct sum*nya adalah $\sum_{i \in I} G_i$ dan memenuhi sifat universal seperti yang ada pada Teorema 1.10. Untuk *direct sum* terbagi menjadi dua yaitu *external direct sum* dari keluarga grup abelian $\{(G_i, +_i) | i \in I\}$ yaitu $\sum_{i \in I} G_i$ dan *internal direct sum* dari keluarga subgrup normal $\{N_i | i \in I\}$ dari grup abelian G yaitu $G = \bigoplus_{i \in I} N_i$.

DAFTAR RUJUKAN

Agustito.D., Kuncoro. S.K., Irfan.M., 2022., *Keberadaan Hasil Kali Langsung dari Ruang Bernorma*., UNNES Journal Mathematics, 11(1),8-15.

Amini.A., Amini. B., Fachini.A., 2010., *Direct Summands of Direct Sums of Modules Whose Endomorphism Rings have two Maximal Right Ideals*., Journal of Pure and Applied Algebra.

Awodey. S., 2010., *Category Theory*., Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York.

Batubenge.T.A., Tshilombo.M.H., 2014., *Topologies on Product and Coproduct Frolicher Spaces*., Demonstratio Mathematica Vol.XLVII, No 4.

Ejagwa.P.A., Ibrahim.A.M., 2017, *Direct Product of Multigroups and Its Generalization*., https://www.researchgate.net/publication/337821013.

Ellerman. D., 2016., *The Number of Diretc-Sum Decompositions of a Finite Vector Space*., arXiv:1603.07619v1 [math.CO] 23 Mar 2016.

Grillet.P.A., 2000., *Abstract Algebra*., Graduate Texts in Mathematics., Springer.

Hu.H., Tholen. W., 1995., *Limits in Free Coproduct Completions*., Journal of Pure and Applied Algebra 105 (1995) 277-291.

Hungerford.T.W., 1974., *Algebra*., Graduate Texts in Mathematics., Springer.

Leinster.T., 2016., *Basic Category Theory*., arXiv:1612.09374v1 [math.CT] 30 Dec 2016.

Luerssen. H. G., Jany. B., 2022., *Coproduct in Categories of q-Matroids*., arXiv:2111.09723v2 [math.CO] 28Feb2022.

Riehl. E., 2014., *Category Theory in Context*., Cambridge University Press.

Spivak. D. I., 2014., *Category Theory for the Sciences*., The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.

Trenard.M.B., Roses.H.P., 2001., *Complete Presentation of Direct Products of Groups*., https://www.researchgate.net/publication/236035469.

Tuganbaev. A. A., 1996., *Direct Sums of Distributive Modules*., https://www.researchgate.net/publication/231005681.