PERBANDINGAN METODE GAUSS-LEGENDRE, GAUSS-LOBATTO DAN GAUSS- KRONROD PADA INTEGRASI NUMERIK FUNGSI EKSPONENSIAL

(*COMPARISON OF GAUSS-LEGENDRE,GAUSS- LOBATTO, AND GAUSS-KRONROD ON NUMERICAL INTEGRATION OF EXPONENTIAL FUNCTION*)

Randhi N. Darmawan
Universitas PGRI Banyuwangi, rndarmawan@uniba-bwi.ac.id

Abstrak

Integrasi numerik merupakan merupakan suatu metode untuk menetukan nilai integrasi dari suatu fungsi dimana jika suatu fungsi tersebut sulit diselesaikan secara analitik menggunakan metode baku yang ada pada ilmu kalkulus. Solusi yang didapatkan oleh integrasi numerik ini adalah nilai hampiran atau aproksimasi sehingga akan muncul *error* . Terdapat dua metode integrasi numerik yaitu metode Newon-Coates (e*qually space*) dan metode Gauss Kuadratur (unequally space). Pada artikel ini akan dikaji integrasi numerik dengan metode Gauss Kuadratur yaitu metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronroad yang akan diterapakan untuk menentukan nilai hampiran integrasi dari fungsi eksponensial. Sehingga akan dilakukan analisis *error* untuk menetukan metode mana yang memiliki akurasi paling bagus yang mendekati nilai eksaknya.

Kata kunci: *Integrasi Numerik, Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, Gauss-Kronrod, Fungsi Eksponensial*

Abstract

Numerical integration is a method to determine the value of the integration of a function where if a function is difficult to be solved analytically using standard methods exist in calculus. The solution obtained by numerical integration is the approximation value so error will be appear. There are two methods of numerical integration methods that are Newon-Coates (equally space) and Quadrature Gauss (unequally space). In this paper will be reviewed numerical integration of Quadrature Gauss method is the Gauss-Legendre, Gauss- Lobatto, and Gauss-Kronroad will be used to determine the approximation value of the integration on exponential function. Therefore the error analysis will be done to determine which method has the most excellent accuracy to approach exact value.

Keyword: *Numerical Integration, Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, Gauss-Kronrod, Exponential Function*

PENDAHULUAN.

Model matematika sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, model tersebut muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam fisika, kimia, ekonomi, dan juga ilmu teknik, seperti teknik sipil, teknik mesin, teknik eletro dan lain sebagainya (Munir, 2003). Model matematika yang rumit tersebut adakalanya akan berbentuk tidak wajar dan sulit untuk ditentukan solusi sejatinya (eksak). Sehingga pada kasus seperti inilah metode numerik bekerja untuk menghampiri solusi sejati dari model matematika tersebut.

Salah satu kasus yang sering muncul adalah masalah integral, bentuk integral yang ada dalam ilmu kalkulus dan metode penyelesaiannya secara analitik menjadi suatu permasalahn tersendiri untuk menyelesaikannya jika bentuk integral tersebut tak wajar dan rumit ditambah lagi melibatkan fungsi eksponensial. Fungsi eksponensial sering muncul pada permasalahan persamaan diferensial, baik biasa maupun parsial, dimana penliti diharuskan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan menentukan nilai integrasinya. Sehingga pada masalah ini integrasi secara numerik akan sangat membantu dalam menentukan solusinya

Pengintegralan secara numerik atau lebih dikenal dengan integrasi numerik merupakan suatu metode aproksimasi untuk memperoleh nilai integral suatu fungsi secara numerik, metode ini digunakan pada fungsi-fungsi yang diintegralkan dengan metode analitik agak sulit. Integrasi numerik dibagi emnjadi dua garis besar yaitu metode Newton Coates (*equally space*) dan metode kuadratur Gauss (*unequaly space*). Metode Newton Coates diantaranya meliputi metode trapesium, Simpson 1/3, simpson 3/8, Boole (Chapra dan Canale, 2010). Sedangkan metode kuadratur Gauss diantaranya adalah metode Gauss-Legendre, Lobatto, Kromroad, Radau, Hermit, Laguerre, dan sebagianya.

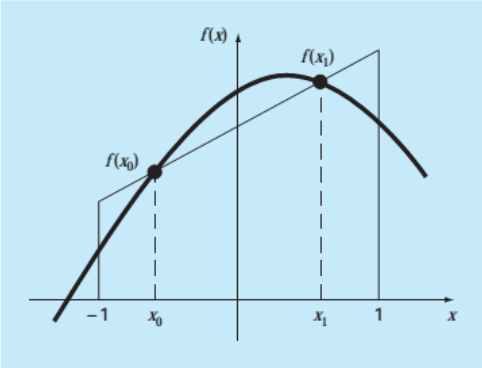
Metode Guass Kuadratur mirip dengan metode trapesium tetapi telah dimodifikasi, untuk menentukan nilai integralnya dengan cara mengambil nilai fungsi di beberapa titik tertentu (*fixed point*) yang diasumsikan dapat mewakili perhitungan luas suatu daerah (Gabriella, 2015). Begitu pula metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronroad menggunakan konsep yang sama.

Pada arikel ini akan dikaji pengintegralan secara numerik pada 5 fungsi eksponensial dengan menggunakan metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronroad, titik yang digunakan dalam penelitian ini adalah 20 titik $(x_0, x_{1,\dots,}x_{19})$ dan 20 bobot $(w_0, w_{1,\dots,}w_{19})$ kemudian akan dianlisis nilai *relative error* yang muncul dari nilai hampirannya. Semakin banyak titik evaluasi yang digunakan maka semakin akurat pula nilai hampirannya mendekati nilai eksak sehingga *error* yang muncul relatif sangat kecil. Oleh karena itu penelitian ini akan memberikan informasi metode yang paling bagus dan akurat dalam menyelesaikan persoalan integral yang melibatkan fungsi-fungsi yang rumit terutama fungsi eksponensial, sehingga pemilihan metode yang tepat akan berdampak signifikan saat metode tersebut diterapkan dalam kasus-kasus tertentu.

KAJIAN TEORI

Metode Gauss-Kuadratur

Konsep dasar metode ini yaitu menghitung nilai integral dengan cara mengambil nilai fungsi di beberapa titik tertentu (*fixed point*) yang disebut dengan titik evaluasi dan mengalikan dengan fungsi pembobot integrasi (Bokhari, 2009).



Gambar 1. Metode Gauss-Kuadratur

Berdasarkan gambar tersebut maka luas daerah dari $f(x)$ dengan batas $x = -1$ hingga $x = 1$ dapat didekati dengan persamaan berikut.

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \tag{1}$$

dengan w_0 dan w_1 adalah panjang interval yang akan ditentukan atau disebut dengan fungsi pembobot. Persamaan (1) disebut persamaan Gauss-Kuadratur 2 titik dan dapat diekspan menjadi,

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_{n-1} f(x_{n-1}) \tag{2}$$

dengan n banyaknya titik dan fungsi pembobot yang digunakan. Semakin besar nilai n maka semakin kompleks penyelesainnya dan semakin kecil nilai *error* yang muncul.

Polinomial Legendre

Untuk $n = 0,1,2, \ldots$ polinom Legendre didefinisikan sebagai

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^2}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{3}$$

Sehingga untuk beberapa nilai n pertama dari persamaan (3) didapatkan P_n:

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + \cdots$$

Transformasi $\int_a^b f(x)dx$ Menjadi $\int_{-1}^1 f(t)dt$

Untuk menghitung integral secara umum $I = \int_a^b f(x)\,dx$ harus dilakukan transformasi interval ke bentuk umum Gauss-Kuadratur dalam interval $[-1,1]$, mengubah variabel x menjadi t dan diferensial dx menjadi dt. Langkah pertama yang dilakukan adalah dengan melakukan perbandingan garis maka diperoleh:

$$x = \frac{(a+b)+(b-a)t}{2} \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (4) didapatkan persamaan diferensialnya:

$$dx = \frac{b-a}{2}dt \tag{5}$$

Sehingga dengan melakukan penyulihan persamaan (4) dan (5) ke $\int_a^b f(x)\,dx$ maka didapatkan (Lismanto, 2010):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}\right]dt \tag{6}$$

Gauss-Legendre

Gauss-Legendre membutuhkan minimal 2 buah titik evaluasi (x_0, x_1) dan 2 nilai fungsi pembobot (w_0, w_1) yang digunakan untuk mengintegralkan suatu fungsi pada interval [-1,1] dengan cukup baik. Titik evaluasi yang digunakan pada Gauss-Legendre didapatkan dari akar penyelesaian polinom Legendre pada persamaan (3) tergantung berapa titik yang digunakan (Brix, et al., 2013). Sebagai contoh jika 2 buah titik yang digunakan pada metode ini maka nilai x_0 dan x_1 merupakan akar penyelesaian dari $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ yaitu x_0 =-0,577350629 dan x_1 =0,577350629. Sedangkan fungsi pembobot dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2} \tag{7}$$

dengan x_i adalah akar penyelesaian ke-*i* dari polinom Legendre dan $P_n'(x_i)$ adalah turunan pertama polinom Legendre pada titik x_i.

Setelah didapatkan titik evaluasi dan fungsi pembobot maka integrasi numerik metode Gauss-Legendre dapat dihitung dengan persamaan (2).

Gauss-Lobatto

Gauss-Lobatto tidak jauh berbeda dengan Gauss-Legendre, metode ini digunakan untuk mengintegralkan suatu fungsi pada interval [-1,1] akan tetapi titik awal dan titik akhir sudah ditetapkan yaitu $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ dan titik-titik berikutnya ditentukan dengan menentukan akar penyelesaian polinom Legendre pada persamaan (3) (Williams, 2006).

Sedangkan fungsi pembobot dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_i = \frac{2}{n(n-1)[P_n'(x_i)]^2} \tag{8}$$

setelah didapatkan titik evaluasi dan fungsi pembobot maka integrasi numerik metode Gauss-Lobatto dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_0 f(-1) + \sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i) + w_{n-1} f(1) \tag{9}$$

Gauss-Kronrod

Metode ini terdengar sedikit asing untuk metode integrasi numerik, meskipun tidak sepopuler dua metode sebelumnya, metode Gauss-Kronrod dapat dijadikan alternatif metode lain untuk melakukan integrasi numerik. Titik-titik evaluasi yang digunakan dalam Gauss-Kronrod adalah titik-titik yang bernilai ganjil atau $2n + 1$ sehingga pada prosesnya akan sama dengan dua metode sebelumnya yaitu menentukan titik-titik evaluasi dengan mencari akar penyelesaian polinom Legendre untuk $x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}$ (Laurie, 1997). Sedangkan fungsi pembobot dapat ditentukan dengan fungsi pembobot Jacobi sebagai berikut:

$$(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \tag{10}$$

dengan $\alpha, \beta > -1$ pada interval [1-,1] dengan nilai parameter sebagai berikut (Gautschi, 2000):

a) $\alpha = \beta = 0$ (formula Gauss-Kuadratur)
b) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ (formula Mehler-Kuadratur)
c) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$
d) $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$

Kesalahan Absolut (*Absolut Error*)

Kesalahan absolut (*Absolut Error)* atau kesalahan mutlak merupakan kesalahan yang disebabkan oleh perbedaan nilai eksak dengan nilai hampiran dan tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan. Kesalahan mutlak didapatkan dari selisih nilai sebenarnya (α) dengan nilai hasil perhitungan atau pengukuran (α^*), sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{\alpha} = |\alpha - \alpha^*| \tag{11}$$

dengan ε_a adalah kesalahan mutlak. Kesalahan relatif (*relative error*) merupakan besarnya tingkat kesalahan yaitu perbandingan dari kesalahan mutlak pada persamaan (11) dengan nilai eksak dan biasanya dinyatakan dalam bentuk prosentase, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\varepsilon_r = \left|\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\alpha}\right| \times 100\% \tag{12}$$

METODE

Jenis penilitian ini adalah *verificative research* yaitu jenis penelitian yang bertujuan untuk menguji suatu teori atau hasil penelitian sebelumnya, sehingga diperoleh hasil yang memperkuat atau menggugurkan teori atau hasil penelitian sebelumnya.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa lima buah fungsi eksponensial yang telah ditentukan dan dimodifikasi dalam nbentuk yang rumit sehingga susah diselesaikan secara analitik menggunakan teknik pengintegralan yang ada dalam kalkulus. Kelima fungsi tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Daftar Modifikasi Fungsi Eksponensial

No	Fungsi Eksponensial
1.	$f_1(x) = \dfrac{(x^2+2x)e^{x^2}}{e^x - x}$
2.	$f_2(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{3x^2e^{x+7}}e^{\cos x}$
3.	$f_3(x) = \dfrac{e^{4\tan x} - \dfrac{1}{e^{x^2}}}{e^x + 9^x}$
4.	$f_4(x) = \dfrac{\sqrt{e^{x^2+x+3}}}{e^{x+1}}$
5.	$f_5(x) = \dfrac{1}{e^{\sqrt{2x^2-4x+7}}}$

Dengan bantuan *software* Maple 13 langkah-langkah penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

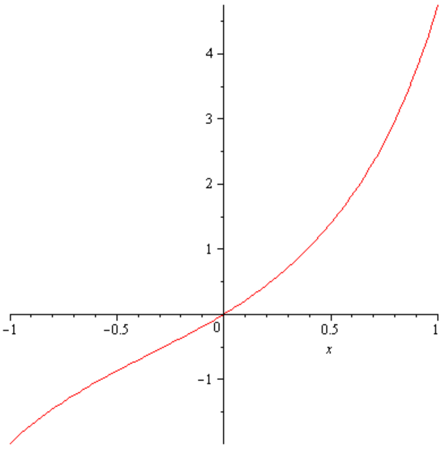
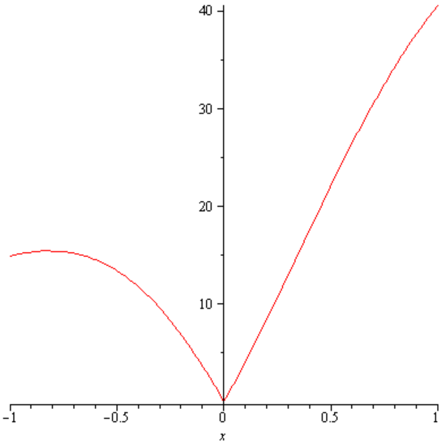
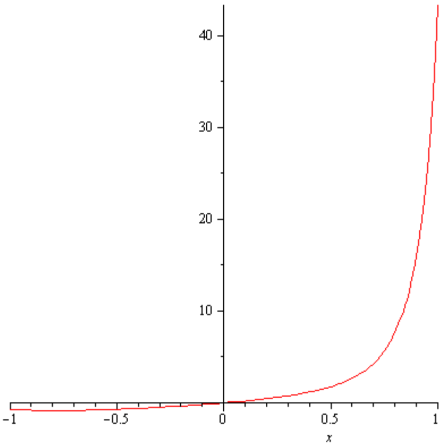
1. Mengumpulkan data berupa modifikasi fungsi eksponensial dan kajian pustaka terkait integrasi numerik metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto dan Gauss Kronrod.
2. Mendefinisikan fungsi terlebih dahulu kemudian ditentukan nilai integralnya secara langsung dengan mengaktifkan *package with(student)* nilai *output* yang keluar merupakan nilai eksak dari integral kelima fungsi.
3. Menentukan titik-titik evaluasi dan fungsi pembobot dari Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto dan Gauss-Kronrod sebanyak 20 titik dan bobot kecuali pada Gauss-Kronroad digunakan 21 titik dan bobot.
4. Menerapkan integrasi numerik dengan metode Gauss-Legendre, Gauss Lobatto dan Gauss-Kronrod dengan menggunakan persamaan (2) dan (9) menggunakan batas yang sama yaitu [-1,1] sehingga didapatkan nilai hampiran integrasi numerik.
5. Menentukan nilai *relative error* menggunakan persamaan (3).
6. Membandingkan hasil integrasi numerik metode Gauss-Legendre, Gauss Lobatto dan Gauss-Kronrod dengan menganalis seberapa besar nilai *relative error* yang muncul berdasarkan pada langkah 5.
7. Membuat kesimpulan, yang merupakan jawaban singat dari permasalahan yang telah dijabarkan dari pembahasan terkait metode integrasi numerik yang paling akurat untuk menyelesaikan integrasi fungsi eksponensial.

HASIL DAN PEMBAHASAN

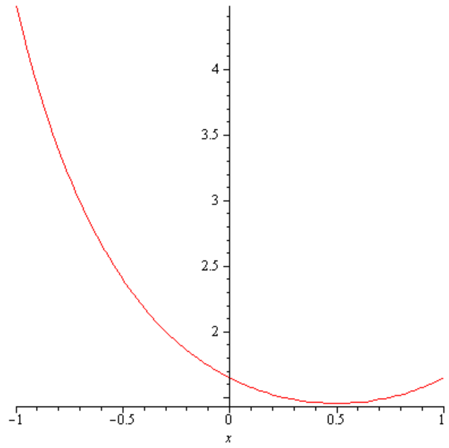
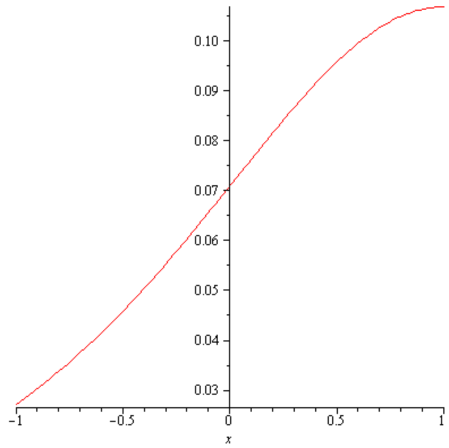
Nilai Eksak Integrasi Fungsi Eksponensial Beserta Grafiknya

Berikut ini nilai eksak dari integrasi kelima fungsi eksponensial yang dimodifikasi dengan batas integrasi [-1,1]:

Tabel 2. Nilai Eksak Integrasi Fungsi Eksponensial dan Grafiknya

Fungsi	**Nilai eksak**	**Grafik**
$f_1(x)$	0.7923101805	
$f_2(x)$	32.85868128	
$f_3(x)$	4.639999741	

Lanjutan Tabel 2. Nilai Eksak Integrasi Fungsi Eksponensial dan Grafiknya

Fungsi	Nilai eksak	Grafik
$f_4(x)$	4.129820044	
$f_5(x)$	0.1404581072	

Nilai Hampiran Integrasi Fungsi Eksponensial

Dengan menggunakan 20 titik evaluasi dan fungsi pembobot maka integrasi numerik dengan menerapkan metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto dan Gauss-Kronrod didapatkan nilai integrasi kelima fungsi eksponensial tersebut sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Hampiran Integrasi Fungsi Eksponensial

Fungsi	Gauss-Legendre	Gauss-Lobatto	Gauss-Kronrod
$f_1(x)$	0,792310181	0,792310181	0,737212954
$f_2(x)$	32,93524926	32,94356016	32,23976094
$f_3(x)$	4,639999742	4,639999743	4,158931191
$f_4(x)$	4,129820041	4,129820042	4,110920306
$f_5(x)$	0,140458107	0,140458107	0,139206685

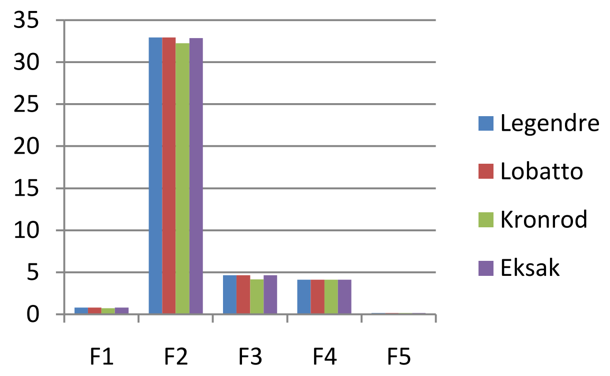
Perbandingan Ketiga Metode

Untuk membandingkan akurasi kinerja dari ketiga metode maka parameter pembanding yang digunakan adalah sebarapa besar nilai *error* yang muncul , sehingga berdasarkan hasil eksak pada Tabel 2 dan nilai hampiran pada Tabel 3 maka didapatkan nilai *relative error* (ε_r) dari integrasi numerik lima fungsi eksponensial dengan menggunakan ketiga metode sebagai berikut:

Tabel 4. Nilai *Relative Error* (ε_r) Masing-masing Metode

Fungsi	**ε_r Gauss-Legendre (%)**	**ε_r Gauss-Lobatto (%)**	**ε_r Gauss-Kronrod (%)**
$f_1(x)$	0.0000000631	0.0000000126	6.953997078
$f_2(x)$	0.2330220722	0.2583149314	1.883582408
$f_3(x)$	0.0000000216	0.0000000431	10.36785726
$f_4(x)$	0.0000000726	0.0000000484	0.457640716
$f_5(x)$	0.0000000000	0.0000000712	0.890957685
Rata-rata	0.0000000316	0.0000000419	3.9224773813

Perbandingan hasil ketiga metode integrasi numerik pada kelima fungsi eksponensial disajikan dalam grafik sebagai berikut:



Gambar 1. Grafik Perbandingan Hasil Integrasi Numerik

Berdasarkan Tabel 4 dan Gambar 1 didapatkan rata-rata ε_r yang muncul dari metode Gauss-Legendre sebesar 0.0000000316% dimana nilai ini merupakan nilai terkecil dibandingkan dengan metode Gauss-Lobatto yang memiliki rata-rata ε_r =0.0000000419% dan metode Gauss-Kronrod $\varepsilon_r = 3.9224773813\%$. Hal ini disebabkan metode Gauss-Legendre menggunakan fungsi pembobot yang lebih akurat dibandingkan metode lainnya, disamping itu penentuan titik-titik evaluasi Gauss-Legendre lebih halus karena mengevaluasi seluruh titik pada selang interval [-1,1] dan sehingga titik awal dan titik akhir belum tentu -1 dan 1 hal ini berbeda dengan metode Gauss-Lobatto dan Gauss-Kronrod. Sedangkan Gauss-Lobatto titik-titik evaluasi yang digunakan titik awal $x_0 = -1$ dan titik akhir $x_{n-1} = 1$ sudah ditetapkan dari awal sehingga mengevaluasi titik-titik pada nilai setalah -1 dan 1. Untuk metode Gauss-Kronrod merupakan metode yang cukup rumit dalam penetuan fungsi pembobot dan juga titik-titik evaluasi yang digunakan hanya sebatas pada titik-titik ganjil $(2n + 1)$.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan maka dapat disimpulkan bahwa metode Gauss-Legendre memiliki nilai $\varepsilon_r = 0.0000000316\%$ yang berarti memeliki nilai hampiran yang akurat mendekati nilai eksak pada fungsi eksponensial yang dimodifikasi. Metode Gauss-Kronrod memiliki nilai $\varepsilon_r = 3.9224773813\%$, oleh karena itu Gauss-Kronrod menjadi metode integrasi numerik yang kurang populer untuk digunakan. Pada kasus penelitian ini yang melibatkan integrasi pada fungsi eksponensial yang dimodifikasi maka metode yang paling akurat mendekati nilai eksak adalah metode Gauss-Legendre salah satu contoh akurat pada integras fungsi $f_5(x)$ memiliki nilai $\varepsilon_r = 0\%$ yang berarti nilai hampiran sama dengan nilai eksak. Sedangkan metode Gauss-Lobatto sejatinya adalah modifikasi dari metode Gauss-Legendre sehingga metode ini masih lebih bagus dari metode Gauss-Kronrod tetapi tidak lebih baik dari metode Gauss-Legendre.

Saran untuk peneliti berikutnya, masih terdapat beberapa metode integrasi numerik diantaranya metode Gaus-Hermit, Gauss Chebysev, Gauss-Radau, dan Gauss-Laguerre yang masih terbuka kemungkinan memiliki nilai integrasi numerik yang lebih akurat dibanding metode Guass-Legendre untuk fungdi eksponensial yang dimodifikasi.

DAFTAR RUJUKAN

Bokhari, M. (2009). *Gauss-Type Quadrature Rules Based on Identity-Type Function,* (Online), (https://www.researchgate.net, diakses 27 Maret 2016).

Brix, K., Canuto, C., & Dahmen, W. (2013). *Legendre-Gauss-Lobatto grids and associated nested dyadic grids*. arXiv:1311.0028v1 [math.NA], (Online), (https://arxiv.org/pdf/1311.0028.pdf, diakses 20 April 2016).

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition.* New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Gabriella, I. (2015). *Perbandingan Metode Gauss-Legendre dan Radau pada Integrasi Numerik*. Skripri tidak diterbitkan. Jember: FMIPA Universitas Jember.

Gautschi, W. (2000). *Gauss–Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions*, Mathematics and Computers in Simulation 54 page 403–412, (Online), (https://www.elsevier.nl/locate/matcom, diakses 10 April 2016).

Laurie. D. P. (1997). *Calculation of Gauss-Kronrod Quadrature Rules.* International Jurnal of Mathematics of Computation. Volume 66, Number 2019, July 1997 pages 1133-1145, (Online), (http://keisan.casio.com, diakses 4 Maret 2016).

Lismanto. (2010). *Integrasi Numerik dari Transformasi Hankel menggunakan Metode Kuadratur Gauss*. Tesis tidak diterbitkan. Depok: Pascasarjana Universitas Indonesia.

Munir, R. (2003). *Metode Numerik.* Bandung: Erlangga.

Williams. P. (2006). A Gauss-Lobatto Quadrature Method for Solving Optimal Control Problem . *ANZIAM J. 47 (EMAC2005)* pp.C101-C115, (Online), (https://anziamj.austms.org.au, diakses 3 Maret 2016).