
**ANALISIS DINAMIK SKEMA EULER UNTUK MODEL
PREDATOR-PREY DENGAN EFEK ALLEE KUADRATIK**
(*DYNAMICAL ANALYSIS OF EULER SCHEME FOR PREDATOR-
PREY WITH QUADRATIC ALLEE EFFECT*)

Vivi Aida Fitria¹, S.Nurul Afiyah²

¹STMIK Asia, viviaidafitria@gmail.com

²STMIK Asia, noeroelafy@gmail.com

Abstrak

Pada penelitian ini dilakukan pendekatan numerik menggunakan skema Euler pada model *predator-prey* dengan efek alelopati. Perilaku dinamik dari model diskrit yang diperoleh kemudian dianalisis, yaitu eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan model tersebut. Analisis kestabilan titik kesetimbangan menunjukkan bahwa titik kepunahan *predator* dan *predator-prey* bersifat tidak stabil tetapi titik kepunahan *prey* dan titik keberhasilan hidup *predator-prey* bersifat stabil dengan syarat tertentu. Dari simulasi numerik menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh sesuai dengan hasil analisis.

Kata kunci: *Model diskrit predator-prey, efek alelopati, kestabilan*

Abstract

In this research, numerical approach using Euler scheme is used for predator-prey model with allelopathic effect. Dynamical behavior of the discrete model such as the existence and stability of the equilibrium point are analyzed. The stability analysis of the equilibrium point show that the predator's and predator-prey's extinction point are unstable but the point of prey extinction and coexistence point of predator-prey are stable in certain conditions. Numerical simulation results show that the result is same with the analytical results.

Keywords: *discrete, predator-prey, allelopathic effect, stability*

PENDAHULUAN

Fenomena pertumbuhan populasi secara dinamik dapat digambarkan dalam bentuk model *predator-prey*. Model *predator-prey* berawal dari model yang sederhana yang diperkenalkan oleh Lotka-Volterra. Model Lotka-Volterra pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926 (Fitria, 2015). Namun pada kenyataannya terdapat fenomena efek lain yang terdapat pada proses pemangsa yang disebut efek alelopati. Efek alelopati merupakan pengaruh langsung maupun tidak langsung dari suatu spesies terhadap spesies lain baik yang bersifat positif maupun negatif melalui pelepasan senyawa

kimia ke lingkungannya (Bandyopadhyay dkk., 2008). Alelopati pertama kali diperkenalkan oleh Molisch pada tahun 1937. Model ekologi seharusnya menyertakan efek alelopati (Rice, 1984), sebab beberapa spesies *predator* menghasilkan zat beracun yang dapat menyebabkan kematian pada *prey* (Murray, 2002).

Model *predator-prey* dengan efek alelopati yang telah diteliti banyak dinyatakan sebagai model kontinu berupa persamaan diferensial nonlinear (Murray, 2002). Model kontinu memiliki beberapa sifat utama yang berkaitan dengan solusi dan kestabilan titik tetapnya. Akan tetapi, solusi eksaknya sulit ditentukan secara analitik karena pada umumnya persamaan diferensial nonlinear mempunyai bentuk yang rumit. Oleh karena itu, penyelesaian secara numerik memainkan peranan penting untuk membantu mencari pendekatan solusi persamaan diferensial yang sulit ditentukan secara analitik. Pendekatan numerik yang sering digunakan adalah metode Euler yang merupakan pendekatan beda hingga standar. Model diskrit yang dihasilkan dari pendekatan metode Euler ini memiliki dinamika perilaku yang lebih kaya jika dibandingkan dengan model kontinu (Fayeldi, 2013).

Model-model diskret yang sudah diteliti antara lain model *predator-prey* dengan fungsi respon Hassel-Varley (Wu & Li, 2009), model *predator-prey* dengan fungsi respon *ratio-dependent* (Naji & Lafta, 2013), model *predator-prey* dengan efek Allee (Wang dkk., 2011), model *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe II (Agiza dkk., 2009), model epidemi SIR dengan tingkat kejadian infeksi monoton (Jie dkk., 2012), dan banyak lagi penelitian model diskret yang lainnya. Dari penelitian mengenai model diskret tersebut dihasilkan bahwa model diskret yang diperoleh memiliki dinamika perilaku yang lebih beragam daripada model kontinunya

Oleh karena itu, dalam penelitian ini dikonstruksi model diskret untuk model *predator-prey* dengan efek alelopati (Fitria, 2015) menggunakan metode Euler. Diharapkan dari penelitian ini dapat mengetahui eksistensi populasi *predator-prey* ketika terdapat efek alelopati. Agar model tidak terlalu kompleks, maka pembahasan pada penelitian ini dibatasi oleh asumsi bahwa efek alelopati hanya dikeluarkan oleh *predator* selama proses predasi untuk mengontrol mangsanya, sehingga model ini hanya berlaku pada *predator* yang dapat mengeluarkan racun.

Model *predator - prey* (Fitria, 2015) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(t) \left[r_1 - a_{11}x(t) - a_{12}y(t) - \gamma x(t)y^2(t) \right], \\ \frac{dy}{dt} &= y(t) \left[r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $x(t)$ menyatakan kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ populasi *predator* pada saat waktu t , r_1 adalah laju pertumbuhan *prey*, a_{11} adalah laju kompetisi antar *prey*, a_{12} adalah laju berkurangnya *prey* karena adanya pemangsaan oleh *predator*, γ adalah laju berkurangnya *prey* karena adanya efek alelopati oleh *predator*, r_2 adalah laju pertumbuhan *predator*, a_{21} adalah laju

bertambahnya *predator* karena adanya pemangsaan terhadap *prey* dan a_{22} adalah laju kompetisi antar *predator*. Semua parameter $r_1, r_2, a_{11}, a_{12}, \gamma, a_{21}, a_{22}, \tau$ bernilai positif.

Misalkan pada persamaan (1) variabel waktu t dibatasi pada selang $0, T$, maka diskretisasi model (1) dilakukan dengan membagi selang $0, T$ menjadi N subselang yang sama dengan lebar $h = t_n - t_{n-1}$. Diperoleh $N + 1$ titik dengan $t_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N$. Maka hasil konstruksi diskretisasi model *predator-prey* dengan efek alelopati menggunakan metode Euler sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hx_n (r_1 - a_{11}x_n - a_{12}y_n - \gamma x_n y_n^2), \\ y_{n+1} &= y_n + hy_n (r_2 + a_{21}x_n - a_{22}y_n). \end{aligned} \quad (2)$$

dimana x_n merupakan kepadatan populasi *prey*, y_n merupakan kepadatan populasi *predator* dan parameter h merupakan ukuran langkah.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini berupa tahapan-tahapan untuk mencapai tujuan penelitian, yaitu pertama meninjau dan memahami bentuk kontinu model *predator-prey* dengan efek alelopati, kedua mendiskretisasi model kontinu menjadi model diskret dengan menggunakan metode Euler, ketiga menentukan titik kesetimbangan model diskret *predator-prey* dengan efek alelopati, keempat menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model diskret *predator-prey* dengan efek alelopati, kelima membandingkan hasil yang diperoleh dengan sifat dinamik bentuk kontinu model *predator-prey* dengan efek alelopati, ketujuh skema numerik yang diperoleh selanjutnya disimulasikan menggunakan *software* MATLAB dan terakhir penarikan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem dinamik diskret adalah titik x^*, y^* yang memenuhi $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$, yaitu :

$$\begin{aligned} x^* &= x^* + hx^* (r_1 - a_{11}x^* - a_{12}y^* - \gamma x^* y^{*2}), \\ y^* &= y^* + hy^* (r_2 + a_{21}x^* - a_{22}y^*). \end{aligned} \quad (3)$$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh

$$x^* = 0 \quad \text{atau} \quad r_1 - a_{11}x^* - a_{12}y^* - 2\gamma x^* y^{*2} = 0 \quad (4)$$

dan

$$y^* = 0 \text{ atau } r_2 + a_{21}x^* - a_{22}y^* = 0 \quad (5)$$

Titik kesetimbangan persamaan (2) diperoleh dari kombinasi persamaan (4) dan (5), yaitu :

1. $E_0(0,0)$. Titik kesetimbangan E_0 dapat disebut sebagai titik kepunahan predator dan prey
2. $E_1\left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0\right)$. Titik kesetimbangan E_1 disebut sebagai titik kepunahan predator,
3. $E_2\left(0, \frac{r_2}{a_{22}}\right)$ Titik kesetimbangan E_2 disebut sebagai titik kepunahan prey,

dan

4. $E_3(x^*, y^*)$ dimana

$$x^* = \frac{a_{22}y^* - r_2}{a_{21}} \text{ dan } y^* \text{ adalah akar positif dari persamaan}$$

$$-\gamma a_{22}y^{*3} + \gamma r_2 y^{*2} - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} y^* + a_{11}r_2 + a_{21}r_1 = 0 \quad (6)$$

Titik kesetimbangan E_3 dapat disebut sebagai titik keberhasilan hidup kedua populasi atau titik koeksistensi. Karena persamaan (6) tidak terdapat perubahan tanda, maka berdasarkan Aturan Tanda Descartes persamaan (6) tidak memiliki akar real negatif. Jadi dapat disimpulkan bahwa persamaan (6) memiliki paling sedikit satu akar real positif dan E_3 eksis jika memenuhi $y^* > \frac{r_2}{a_{22}}$.

2. Analisis Kestabilan

Lemma 1. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$F \lambda = \lambda^2 - p\lambda + q$ adalah persamaan karakteristik A dengan $p = \text{trace}(A)$ dan $q = \det(A)$. Jika λ_1 dan λ_2 adalah akar persamaan $F \lambda = 0$ maka

1. $\lambda_1 < 1$ dan $\lambda_2 < 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q < 1$,
2. $\lambda_1 < 1$ dan $\lambda_2 > 1$ (atau $\lambda_1 > 1$ dan $\lambda_2 < 1$) jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) < 0$,
3. $\lambda_1 > 1$ dan $\lambda_2 > 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$, dan $q > 1$
4. λ_1 dan λ_2 adalah kompleks dan $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $p^2 - 4q < 0$, dan $q = 1$.

Untuk menganalisis kestabilan model, digunakan lemma 1. Lemma tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan relasi antara akar dan koefisien dari persamaan kuadrat.

Selanjutnya menentukan matriks Jacobi yang dipergunakan untuk menganalisis kestabilan setiap titik kesetimbangan model. Matriks Jacobi dari sistem (2) adalah

$$J_{x^*, y^*} = \begin{pmatrix} 1 + hr_1 - 2ha_{11}x^* - ha_{12}y^* - 2h\gamma x^*y^{*2} & -ha_{12}x^* - 2h\gamma x^{*2}y^* \\ ha_{21}y^* & 1 + hr_2 + ha_{21}x^* - 2ha_{22}y^* \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobi di E_0 adalah

$$J_{0,0} = \begin{pmatrix} 1 + hr_1 & 0 \\ 0 & 1 + hr_2 \end{pmatrix},$$

nilai eigen $\lambda_1 = 1 + hr_1 > 1$ dan $\lambda_2 = 1 + hr_2 > 1$. Dapat disimpulkan bahwa E_0 bersifat tak stabil (*source*).

Matriks Jacobi di E_1 adalah

$$J_{\frac{r_1}{a_{11}}, 0} = \begin{pmatrix} 1 - hr_1 & -\frac{ha_{12}r_1}{a_{11}} \\ 0 & 1 + hr_2 + \frac{ha_{21}r_1}{a_{11}} \end{pmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1 - hr_1$ dan $\lambda_2 = 1 + hr_2 + \frac{ha_{21}r_1}{a_{11}}$.

Dapat disimpulkan bahwa E_1 bersifat tak stabil pelana (*saddle*) jika $h < \frac{2}{r_1}$ dan bersifat tak stabil (*source*) jika $h > \frac{2}{r_1}$.

Matriks Jacobi di E_2 adalah

$$J_{0, \frac{r_2}{a_{22}}} = \begin{pmatrix} 1 + hr_1 - \frac{ha_{12}r_2}{a_{22}} & 0 \\ \frac{ha_{21}r_2}{a_{22}} & 1 - hr_2 \end{pmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1 + hr_1 - \frac{ha_{12}r_2}{a_{22}}$ dan $\lambda_2 = 1 - hr_2$.

Teorema 1: Misal $h_1 = \frac{2a_{22}}{a_{12} - r_1 a_{22}}$ dan $h_2 = \frac{2}{r_2}$,

1. E_2 akan *sink* jika $a_{12}r_2 > r_1 a_{22}$ dan $h < \min(h_1, h_2)$
2. E_2 akan *saddle* jika $a_{12}r_2 > r_1 a_{22}$ dan $\min(h_1, h_2) < h < \max(h_1, h_2)$
3. E_2 akan *source* jika $a_{12}r_2 > r_1 a_{22}$ dan $h > \max(h_1, h_2)$
4. E_2 akan *non-hyperbolic* jika $a_{12}r_2 > r_1 a_{22}$ dan $h = h_1$ atau $h = h_2$.

Matriks Jacobi titik kesetimbangan E_3 , sebagai berikut:

$$J E_3 = \begin{pmatrix} 1 - ha_{11}x^* - h\gamma x^*y^{*2} & -ha_{12}x^* - 2h\gamma x^{*2}y^* \\ ha_{21}y^* & 1 - ha_{22}y^* \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

dengan $p = 2 - ha_{11}x^* - h\gamma x^*y^{*2} - ha_{22}y^*$, dan $q = 1 - ha_{22}y^* - ha_{11}x^* + h^2a_{11}a_{22}x^*y^* - \gamma x^*y^{*2} + h^2a_{21}a_{12}x^*y^* + 2h^2a_{21}x^{*2}y^{*2}$.

Teorema 2: Misal

$$Z_0 = a_{11}a_{22}x^*y^* + \gamma a_{22}y^{*3} + a_{21}a_{12}x^*y^* + 2a_{21}\gamma x^{*2}y^{*2},$$

$$Z^* = \frac{1}{4} a_{11}x^* + \gamma x^*y^{*2} + a_{22}y^{*2},$$

$$h^* = \frac{a_{22}y^* + a_{11}x^* + \gamma x^*y^{*2}}{a_{11}a_{22}x^*y^* + \gamma a_{22}y^{*3} + a_{21}a_{12}x^*y^* + 2a_{21}\gamma x^{*2}y^{*2}},$$

$$A = Z_0,$$

$$B = -2a_{11}x^* - \gamma x^*y^{*2} - 2a_{22}y^*, C = 4,$$

$$h_3 = h^* - \frac{B^2 - 4AC}{2A}$$

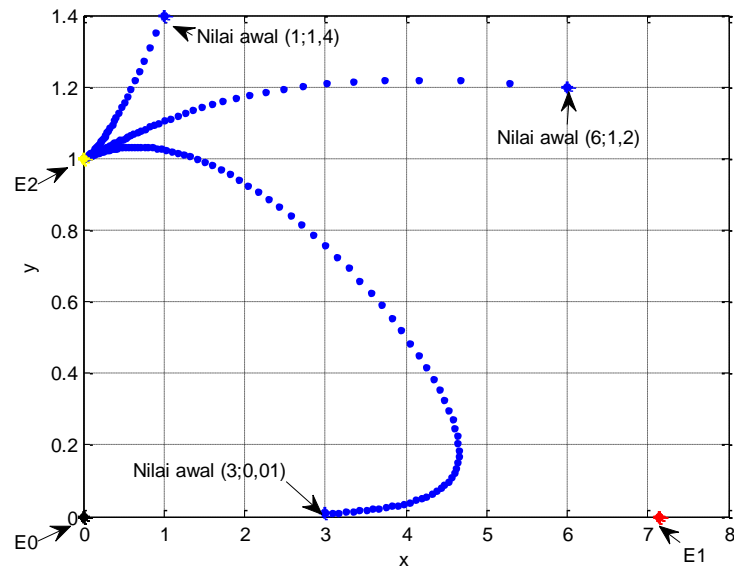
$$h_4 = h^* + \frac{B^2 - 4AC}{2A}$$

Titik kesetimbangan E_3 bersifat:

1. *Sink* jika memenuhi salah satu kondisi berikut :
 - a. $0 < h < h^*$ dan $Z_0 \geq Z^*$ atau
 - b. $0 < h < h_3$ dan $Z_0 < Z^*$
2. *Saddle* jika $h_3 < h < h_4$ dan $Z_0 < Z^*$
3. *Source* jika
 - a. $h > h^*$ dan $Z_0 \geq Z^*$ atau
 - b. $h > h_4$ dan $Z_0 < Z^*$
4. *Non-hyperbolic* jika
 - a. $h = h^*$ dan $Z_0 \geq Z^*$ atau
 - b. $h = h_3$ atau $h = h_4$ dan $Z_0 \leq Z^*$

3. Simulasi Numerik

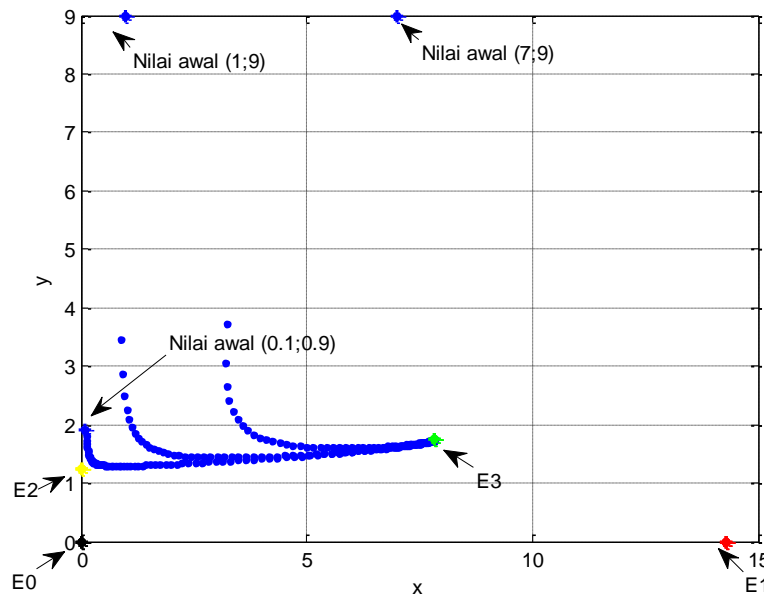
Untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_2 digunakan parameter $r_1 = 0.5, r_2 = 1, a_{11} = 0.07, a_{12} = 1, a_{21} = 0.05, a_{22} = 1, \gamma = 0.008$. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0.1$ Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $a_{12}r_2 > r_1a_{22}$ dan $h < \min(h_1, h_2)$ maka syarat kestabilan E_2 terpenuhi.



Gambar 1. Simulasi model untuk kestabilan titik E_2

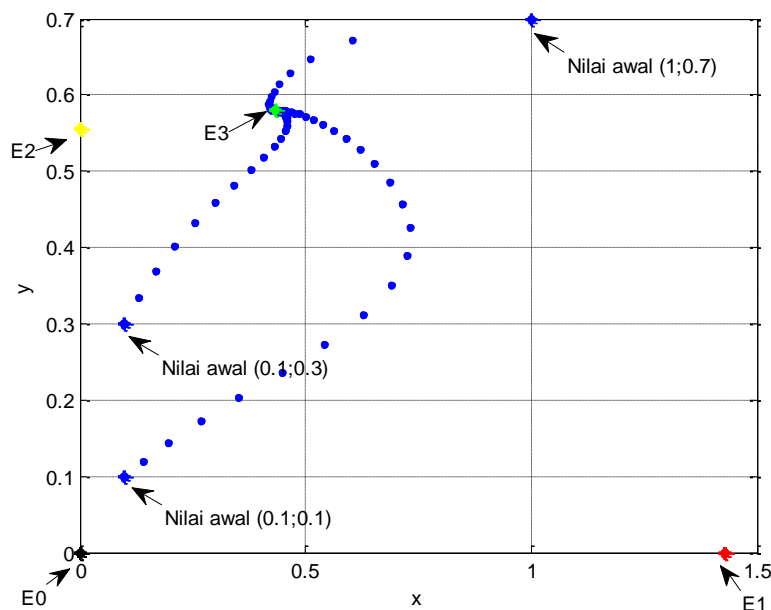
Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa E_2 *sink*. Titik kesetimbangan E_0, E_1 dan E_2 eksis, tetapi titik kesetimbangan E_3 tidak eksis. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_2(0,1)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang *prey* akan punah dan ekosistem hanya akan dihuni oleh *predator*.

Sedangkan untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_3 dengan syarat kestabilan $0 < h < h_3$ dan $Z_0 < Z^*$, digunakan parameter $r_1 = 1, r_2 = 1, a_{11} = 0.07, a_{12} = 0.15, a_{21} = 0.05, a_{22} = 0.8, \gamma = 0.008$. Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan $E_3(7.8426, 1.7402)$. Karena $y^* > \frac{r_2}{a_{22}}$, yaitu $1.7402 > 1.25$, maka syarat eksistensi E_3 terpenuhi. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0.1$, dimana h tersebut lebih kecil dari h_3 dan $Z_0 < Z^*$ maka syarat kestabilan E_3 terpenuhi.



Gambar 2. Simulasi model untuk kestabilan titik E_3 syarat $0 < h < h_3$ dan $Z_0 < Z^*$

Untuk mengilustrasikan kestabilan titik kesetimbangan E_3 dengan syarat kestabilan $0 < h < h^*$ dan $Z_0 \geq Z^*$, digunakan parameter $r_1 = 1, r_2 = 0.5, a_{11} = 0.7, a_{12} = 1, a_{21} = 0.05, a_{22} = 0.9, \gamma = 0.008$. Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh titik kesetimbangan $E_3(0.4338752920, 0.5796597384)$. Karena $y^* > \frac{r_2}{a_{22}}$, yaitu $0.5796597384 > 0.55556$, maka syarat eksistensi E_3 terpenuhi. Ukuran langkah yang digunakan adalah $h = 0.5$, dimana h tersebut lebih kecil dari h^* dan $Z_0 \geq Z^*$ maka syarat kestabilan E_3 terpenuhi.



Gambar 3. Simulasi model untuk kestabilan titik E_3 syarat $0 < h < h^*$ dan $Z_0 \geq Z^*$

Berdasarkan Gambar 2 dan Gambar 3 terlihat bahwa E_3 *sink*. Titik kesetimbangan E_0, E_1, E_2 dan E_3 eksis. Dengan diberikan tiga nilai awal, semua grafik solusi menuju titik kesetimbangan $E_3(x^*, y^*)$. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka panjang ekosistem akan dihuni oleh kedua spesies tersebut yaitu *predator* dan *prey*.

PENUTUP

Model *predator-prey* dengan efek alelopati diperoleh dengan melakukan diskretisasi model menggunakan pendekatan metode Euler. Hasil analisis menunjukkan bahwa model *predator-prey* dengan efek alelopati terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan E_0 , titik kesetimbangan kepunahan *predator* E_1 , titik kesetimbangan kepunahan *prey* E_2 dan titik kesetimbangan interior E_3 . Titik kesetimbangan E_0 dan E_1 tidak pernah stabil. Sedangkan sifat kestabilan titik kesetimbangan E_2 dan E_3 ditentukan oleh suatu syarat dan kondisi tertentu.

DAFTAR RUJUKAN

- Agiza, H. N., Elabbasy, E. M., El-Metwally, H., & Elsadany, A. A. (2009). Chaotic dynamics of a discrete prey–predator model with Holling type II. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(1), 116-129.
- Bandyopadhyay, M., Saha, T., & Pal, R. (2008). Deterministic and stochastic analysis of a delayed allelopathic phytoplankton model within fluctuating environment. *Nonlinear Analysis: Hybrid systems*, 2(3), 958-970.
- Fayeldi, T. (2013). *Perilaku dinamik model epidemi sir diskrit dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton*. Tesis. Universitas Brawijaya.
- Fitria. (2015). Stability analysis of *predator-prey* model with allelopathic effect. *AIP Conference Proceedings*, 1651(59), 59-63.
- Jie, W., Xi-Sheng, Z., Xian-He, Z., & Hong-Liang, G. (2012). Stability and Hopf Bifurcation Analysis on a Numerical Discretization of the Distributed Delay Equation. *Chinese Physics Letters*, 29(5), 050203.
- Liu, X., & Xiao, D. (2007). Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator–prey system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(1), 80-94.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction Third Edition*. Springer. Verlag Berlin Heidelberg.
- Naji, R.K & A.H. Lafta. (2013). On the dynamics of discrete-time *prey-predator* system with ratio-dependent functional response. *Iraqi Journal of Science*, 54(1), 157-164.
- Rice, E. (1984). *Allelopathy*. New York: Academic Press.
- Wang, W. X., Zhang, Y. B., & Liu, C. Z. (2011). Analysis of a discrete-time predator–prey system with Allee effect. *Ecological Complexity*, 8(1), 81-85.
- Wang, X., Liu, H., & Xu, C. (2012). Hopf bifurcations in a predator-prey system of population allelopathy with a discrete delay and a distributed delay. *Nonlinear Dynamics*, 69(4), 2155-2167.

Wu, R., & Li, L. (2009). Permanence and global attractivity of discrete predator-prey system with Hassell-Varley type functional response. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009.