DEKOMPOSISI SUPER AJAIB BERBENTUK LINTASAN DARI AMALGAMASI GRAF SIKLUS

(*A PATH-SUPER MAGIC DECOMPOSITION OF THE VERTEX AMALGAMATION OF SOME CYCLES*)

Sigit Pancahayani[1]
[1]Institut Teknologi Kalimantan, spancahayani@itk.ac.id

Abstrak

Misalkan $G = Amal\{C_n\}_t$ adalah graf sederhana, berhingga, dan terhubung yang diperoleh dengan melekatkan t buah graf siklus berukuran n pada sebuah titik tetap v_0 sebagai terminalnya. Jika H adalah subgraf dari G, maka G dikatakan memuat dekomposisi H super ajaib jika terdapat koleksi subgraf dari G, yaitu $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ yang memenuhi untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$ berlaku $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ jika $i \neq j$, $\bigcup_i H_i = G$, dan $\forall_i H_i \cong H$, fungsi bijeksi $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1, 2, 3, \cdots, |V(G)| + |E(G)|$, dan $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \cdots, |V(G)|\}$ sehingga setiap subgraf $H_i \in H$ memiliki bobot yang sama sebesar k, sebagai konstanta ajaib. Pada penelitian ini, digunakan multiset dengan konsep keseimbangan-k untuk menunjukkan bahwa $Amal\{C_n\}_t$ memuat dekomposisi P_{n+1} super ajaib.

Kata kunci: Amalgamasi; Dekomposisi; Graf Siklus; Lintasan

Abstract

Let $G = Amal\{C_n\}_t$ be a simple, finite, and connected graph which is constructed by joining t copy of cycles of order n onto a fixed point, v_0, called terminal vertex. Let H be a subgraph of G. G admits a super magic H decomposition if there exists $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ a collection of subgraphs of G which satisfies $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ for $i \neq j$ where $i, j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_i H_i = G$, and $\forall_i\ H_i \cong H$, a bijection mapping $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1,2,3, \cdots, |V(G)| + |E(G)|$, and $f(V(G)) = \{1,2,3, \cdots, |V(G)|\}$ such that every subgraph $H_i \in H$ has the same weight of valuation k as a magic constant. This research uses multiset concept of $k - balance$ to show that $Amal\{C_n\}_t$ admits a $P_{n+1}-$super magic decomposition.

Keywords: *Amalgamation; Decomposition; Cycles; Path*

PENDAHULUAN

Penelitian ini difokuskan pada graf terhubung yang sederhana dan berhingga. Misalkan $G = (V, G)$ adalah suatu graf dan H adalah subgraf dari G. Graf G disebut memuat dekomposisi H jika terdapat suatu koleksi subgraf dari G, $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ yang memenuhi syarat jika $i, j \in \mathbb{N}$ dengan $i \neq j$, maka berlaku $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$, $\bigcup_i H_i = G$, dan $\forall_i H_i \cong H$. Lebih jauh, G memuat dekomposisi H ajaib jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1,2,3, \cdots, |V(G)| + |E(G)|$ sedemikian sehingga setiap subgraf $H_i \in \mathcal{H}$ memiliki bobot yang sama, yaitu $w(H_i) = \sum_{v \in V(H_i)} f(v) + \sum_{e \in E(H_i)} f(e) = k$, dengan k adalah konstanta ajaib. Selanjutnya, G memuat dekomposisi H super ajaib jika $f(V(G)) = \{1,2,3,\cdots,|V(G)|\}$. Beberapa hasil mengenai dekomposisi H ajaib diberikan oleh (Salman & Maryati, 2010), (Maryati, 2011), (Inayah, Lladó, & Moragas, 2012), (Maryati, Salman, & Baskoro, 2013), dan (Roswitha, Baskoro, Maryati, Kurdhi, & Susanti, 2013).

METODE

Maryati (2011) juga memperkenalkan suatu konsep keseimbangan-k pada sebuah himpunan. Misalkan X adalah himpunan. Didefinisikan $\sum X = \sum_{x\in X} x$ sebagai *sumset*, yaitu jumlahan dari seluruh anggota dari himpunan X. Didefinisikan pula $\mathcal{M}$ sebagai multiset, yaitu himpunan yang memungkinkan untuk memiliki anggota yang sama. Misalkan m, n, dan k_i adalah bilangan bulat dengan $i \in [1,n]$, $\mathcal{M} = \{m_1^{k_1}, m_2^{k_2}, \dots, m_n^{k_n}\}$ adalah multiset yang memiliki anggota m_i sebanyak k_i. Pada dua buah multiset $X_i = \{x_1^{k_i}, x_2^{k_i}, \dots, x_n^{k_i}\}$, dengan $i \in [1,n]$ dan $Y_j = \{y_1^{k_j}, y_2^{k_j}, \dots, y_m^{k_j}\}$, dengan $j \in [1,m]$, didefinisikan $X_i \uplus Y_j = \{x_1^{k_i}, x_2^{k_i}, \dots, x_n^{k_i}, y_1^{k_j}, y_2^{k_j}, \dots, y_m^{k_j}\}$. Jika $k \in \mathbb{N}$, multiset $\mathcal{M}$ memenuhi keseimbangan-k jika terdapat k buah M_i sebagai subhimpunan $\mathcal{M}$ sedemikian sehingga $|M_i| = \frac{|\mathcal{M}|}{k}$, $\sum M_i = \frac{\sum \mathcal{M}}{k}$, dan $\uplus_{i=1}^{k} M_i = \mathcal{M}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $\mathcal{C} = \{C_{n,i} | i = 1,2,3,\dots,t\}$ adalah koleksi graf siklus dan setiap sikus memiliki sebuah titik tetap v_0 yang disebut terminal. Amalgamasi titik dari sejumlah siklus di $\mathcal{C}$, dinotasikan sebagai $Amal\{C_{n,i}\}_{i=1}^{t}$, adalah graf yang diperoleh dengan cara melekatkan titik-titik terminal dari setiap siklus. Jika setiap $C_{n,i}$ isomorfis terhadap C_n, maka amalgamasi titik dari t buah C_n secara sederhana ditulis $Amal\{C_n\}_t$.

Dalam penelitian ini, diperlukan format pelabelan titik dan sisi dalam $Amal\{C_n\}_t$ sebagai berikut:

- Untuk $i = 1,2,3,\dots,t$, setiap siklus $C_{n,i}$ di $Amal\{C_n\}_t$ disebut daun dengan label titik $V(C_{n,i}) = \{v_0, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n-1}^i\}$ dan $E(C_{n,i}) = \{e_j^i = v_{j-1}^i v_j^i, e_n^i = v_{n-1}^i v_0 | j = 1,2,\dots,n-1\}$.
- Untuk $i = 1,2,3,\dots,t-1$, label untuk titik-titik di subgraf P_{n+1}^i dari $Amal\{C_n\}_t$ adalah $V(P_{n+1}^i) = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n-1}^i, v_0, v_1^{i+1}\}$ dan $V(P_{n+1}^t) = \{v_1^t, v_2^t, \dots, v_{n-1}^t, v_0, v_1^1\}$

Dari format pelabelan titik dan sisi pada $Amal\{C_n\}_t$ tersebut, terlihat bahwa untuk $i = 1,2,3,\dots,t$, v_0 muncul pada t buah P_{n+1}^i dan v_1^i terdaftar sebanyak dua kali dari seluruh P_{n+1}^i.

Teorema 1

Misalkan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah dua buah bilangan bulat positif. Maka $Amal\{C_n\}_t$ memuat dekomposisi P_{n+1} super ajaib dengan $k = nt(2n-1) + (2n+1)$.

Bukti

Perhatikan bahwa $|V(Amal\{C_n\}_t)| = (n-1)t+1$ dan $|E(Amal\{C_n\}_t)| = nt$. Kemudian, didefinisikan sebuah multiset

$$\mathcal{M} = \{1,1,2,2,3,3,\dots,t,t,t+1,t+2,t+3,\dots,\underbrace{(n-1)t+1,\dots,(n-1)t+1}_{t\ kali},$$

$$(n-1)t+2,(n-1)t+3,\dots,(2n-1)t+1\}.$$

Untuk $i = 1,2,\dots,t-1$, misalkan M_i dan M_t adalah submultiset dari $\mathcal{M}$ sedemikian hingga $(\bigcup_i M_i) \uplus M_t = \mathcal{M}$. Misalkan $M_i = \biguplus_{k=1}^{5} A_k^i$ dan $M_t = \biguplus_{k=1}^{5} A_k^t$ dengan

$A_1^i = \{jt+i \mid j = 0,1,2,3,\dots,n-2\}$;
$A_2^i = \{(n-1)t+1\}$;
$A_3^i = \{1+i\}$;
$A_4^i = \{(n+j)t+2-i \mid j = 0,1,2,3,\dots,n-2\}$;
$A_5^i = \{(2n-1)t+1-i\}$;
$A_1^t = \{jt \mid j = 1,2,3,\dots,n-1\}$;
$A_2^t = \{(n-1)t+1\}$;
$A_3^t = \{1\}$;
$A_4^t = \{(n+j)t+2 \mid j = -1,0,1,2,3,\dots,n-3\}$;
dan
$A_5^t = \{(2n-1)t+1\}$;

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum M_i &= \sum A_1^i + \sum A_2^i + \sum A_3^i + \sum A_4^i + \sum A_5^i \\ &= \sum_{j=0}^{n-2}(jt+i) + (n-1)t+1+(1+i) + \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-2}[(n+j)t+2-i] + [(2n-1)t+1-i] \\ &= nt(2n-1)+(2n+1)\end{aligned}$$

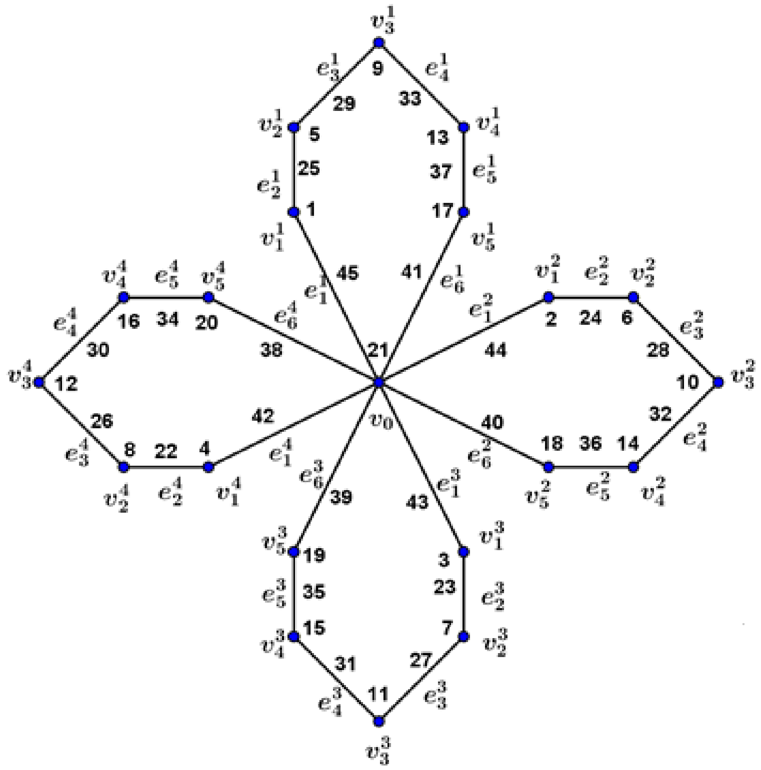
dan

$$\begin{aligned}\sum M_t &= \sum A_1^t + \sum A_2^t + \sum A_3^t + \sum A_4^t + \sum A_5^t \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} jt + [(n-1)t+1] + 1 + \sum_{j=-1}^{n-3}[(n+j)t+2] + [(2n-1)t+1] \\ &= nt(2n-1)+(2n+1)\end{aligned}$$

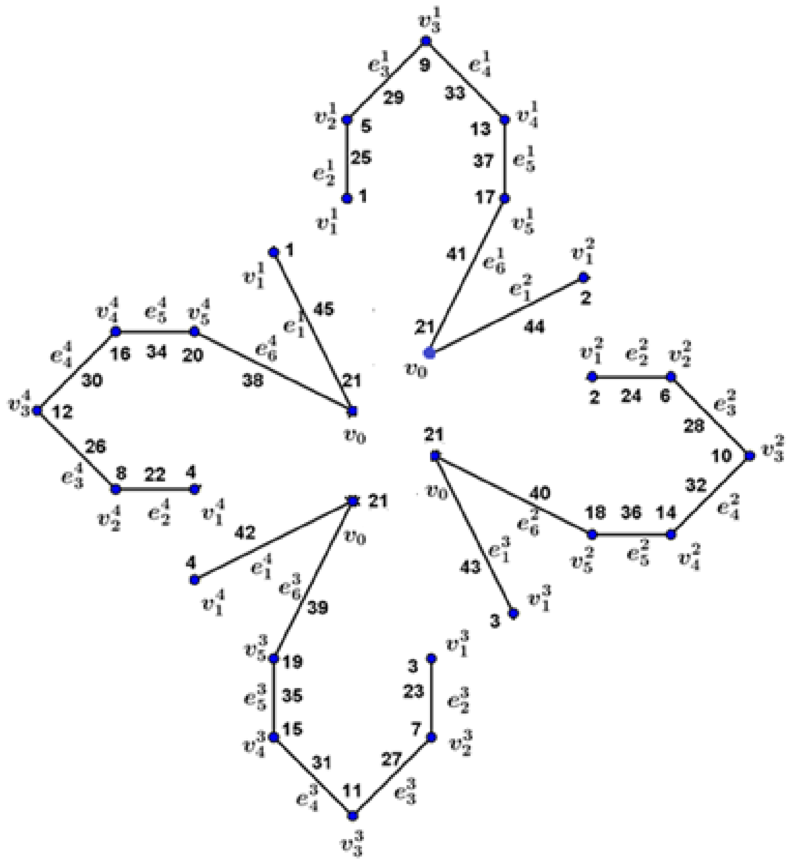
Selanjutnya, untuk $i = 1,2,\dots,t$ dan $j = 1,2,\dots,n-1$, didefinisikan fungsi pelabelan pada titik sebagai berikut:

$f_1 : V(Amal\{C_n\}_t) \to \{1,2,3,\dots,t,(n-1)t+1\}$
$v_j^i \mapsto (j-1)t+i$
$v_0 \mapsto (n-1)t+1$
dan
$f_2 : E(Amal\{C_n\}_t) \to \{(n-1)t+2,(n-1)t+3,\dots,(2n-1)t+1\}$
$e_j^i \mapsto (n+j-2)t+2-i$ untuk $i = 1,2,\dots,t$ dan $j = 2,3,\dots,n$
$e_1^{i+1} \mapsto (2n-1)t+1-i$
$e_1^1 \mapsto (2n-1)t+1$

Dengan demikian, himpunan label titik pada subgraf $P_{n+1}^i \subseteq Amal\{C_n\}_t$ untuk $i = 1,2,\dots,t$ adalah $f_1\left(V\left(P_{n+1}^i\right)\right) \cup f_2\left(E\left(P_{n+1}^i\right)\right) = M_i$ dan $f_1\left(V(P_{n+1}^t)\right) \cup f_2\left(E(P_{n+1}^t)\right) = M_t$. Oleh karena itu, $Amal\{C_n\}_t$ memuat dekomposisi P_{n+1}super ajaib dengan konstanta ajaib $k = nt(2n-1)+(2n+1)$. ∎



Gambar 1. Pelabelan Titik dan Sisi pada Graf $Amal\{C_6\}_4$



Gambar 2. Dekomposisi Super Ajaib pada Graf $Amal\{C_6\}_4$ dengan Konstanta Ajaib $k = 277$

Teorema 2
Misalkan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah dua buah bilangan bulat positif. Maka $Amal\{C_n\}_t$ memuat dekomposisi P_{n+1}super ajaib dengan $k = 2nt(n-1) + (3n + t + 1)$.

Bukti
Definisikan sebuah multiset

$$\mathcal{N} = \{\underbrace{1,\dots,1}_{t\ kali}, 2,2,3,4,\dots,t,t,t+1,t+1,t+2,t+3,\dots,(n-1)t+1,(n-1)t + 2,(n-1)t+3,\dots,(2n-1)t+1\}$$

Untuk $i = 1,2,\dots,t-1$, misalkan N_i dan N_t adalah submultiset dari $\mathcal{N}$ sedemikian hingga $(\bigcup_i N_i) \uplus N_t = \mathcal{N}$. Misalkan $N_i = \biguplus_{k=1}^{5} B_k^i$ dan $N_t = \biguplus_{k=1}^{5} B_k^t$ dengan

$B_1^i = \{1\}$;
$B_2^i = \{jt + 1 + i | j = 0,1,2,\dots,n-2\}$;
$B_3^i = \{i + 2\}$;
$B_4^i = \{(n + j)t + 2 - i | j = 0,1,2,3,\dots,n-2\}$;
$B_5^i = \{(2n-1)t + 1 - i\}$;
$B_1^t = \{1\}$;
$B_2^t = \{jt + 1 | j = 1,2,3,\dots,n-1\}$;
$B_3^t = \{2\}$;
$B_4^t = \{(n + j)t + 2 | j = -1,0,1,2,\dots,n-3\}$;
dan
$B_5^t = \{(2n-1)t + 1\}$;

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}\sum N_i &= \sum B_1^i + \sum B_2^i + \sum B_3^i + \sum B_4^i + \sum B_5^i \\ &= 1 + \textstyle\sum_{j=0}^{n-2}(jt + 1 + i) + (i + 2) + \\ &\quad \textstyle\sum_{j=0}^{n-2}[(n + j)t + 2 - i] + [(2n-1)t + 1 - i] \\ &= 2nt(n-1) + (3n + t + 1)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\sum N_t &= \sum B_1^t + \sum B_2^t + \sum B_3^t + \sum B_4^t + \sum B_5^t \\ &= 1 + \textstyle\sum_{j=1}^{n-1}(jt + 1) + 2 + \sum_{j=-1}^{n-3}[(n + j)t + 2] + [(2n-1)t + 1] \\ &= 2nt(n-1) + (3n + t + 1)\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $i = 1,2,\dots,t$ dan $j = 1,2,\dots,n-1$, didefinisikan fungsi pelabelan pada titik sebagai berikut:

$g_1: V(Amal\{C_n\}_t) \to \{1,2,3,\dots,t,(n-1)t+1\}$
$v_j^i \mapsto (j-1)t + i + 1$
$v_0 \mapsto 1$
dan
$g_2: E(Amal\{C_n\}_t) \to \{(n-1)t+2,(n-1)t+3,\dots,(2n-1)t+1\}$
$e_j^i \mapsto (n + j - 2)t + 2 - i$ untuk $i = 1,2,\dots,t$ dan $j = 2,3,\dots,n$
$e_1^{i+1} \mapsto (2n-1)t + 1 - i$
$e_1^1 \mapsto (2n-1)t + 1$

Dengan demikian, himpunan label titik pada subgraf $P_{n+1}^i \subseteq Amal\{C_n\}_t$ untuk $i = 1,2,\dots,t$ adalah $g_1\left(V\left(P_{n+1}^i\right)\right) \cup g_2\left(E\left(P_{n+1}^i\right)\right) = N_i$ dan $g_1\left(V\left(P_{n+1}^t\right)\right) \cup$

$g_2\left(E\left(P_{n+1}^t\right)\right) = N_t$. Oleh karena itu, $Amal\{C_n\}_t$ memuat dekomposisi P_{n+1}super ajaib dengan konstanta ajaib $k = 2nt(n-1) + (3n + t + 1)$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Amalgamasi titik t buah graf siklus yang berukuran n memuat dekomposisi super ajaib berbentuk lintasan dengan panjang $n + 1$ mempunyai konstantan ajaib $k_1 = 2nt(n-1) + (3n + t + 1)$ dan $k_2 = 2nt(n-1) + (3n + t + 1)$.

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan dekomposisi ajaib untuk berbagai hasil operasi dari beberapa graf serta mencari dualnya.

DAFTAR RUJUKAN

Inayah, N., Lladó, A., & Moragas, J. (2012). Magic and antimagic H-decompositions. *Discrete Mathematics*, *312*(7), 1367–1371. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.11.041

Maryati, T. K. (2011). *Karakterisasi graf h ajaib dan graf h ajaib super*. Institut Teknologi Bandung.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., & Baskoro, E. T. (2013). Supermagic coverings of the disjoint union of graphs and amalgamations. *Discrete Mathematics*, *313*(4), 397–405. https://doi.org/10.1016/j.disc.2012.11.005

Roswitha, M., Baskoro, E. T., Maryati, T. K., Kurdhi, N. A., & Susanti, I. (2013). Further results on cycle-supermagic labeling. *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, *10*(2), 211–220.

Salman, A. N. M., & Maryati, T. (2010). On graph-(super) magic labeling of a path amalgamation of isomorphic graphs. In *Proceeding of the 6th ICMSA 2010*. Malaysia.